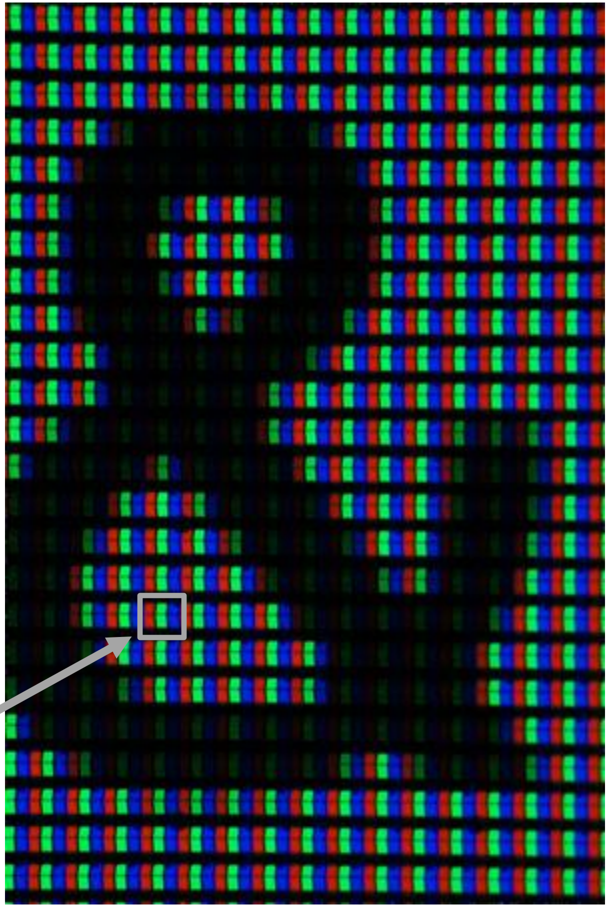
Computação Gráfica

Aula 2: Desenhando Triângulos

Telas / Diplays

As telas são compostas de pixels
Iremos simplificar como quadradinhos
Cada "quadradinho" vai ter sua cor

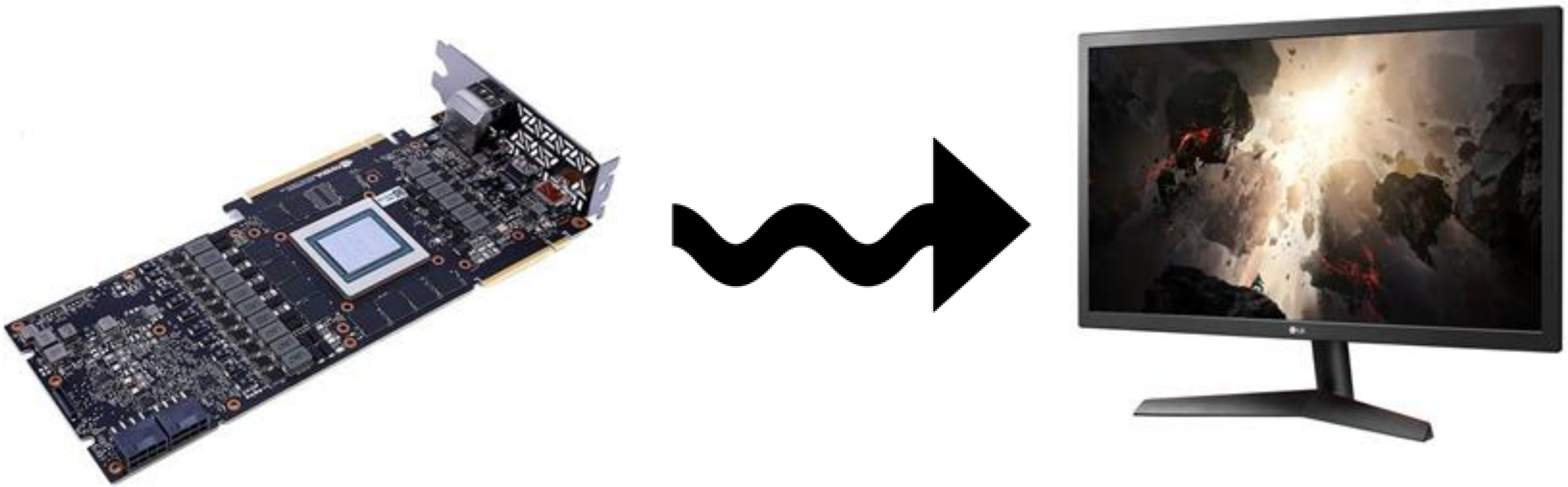


Um pixel

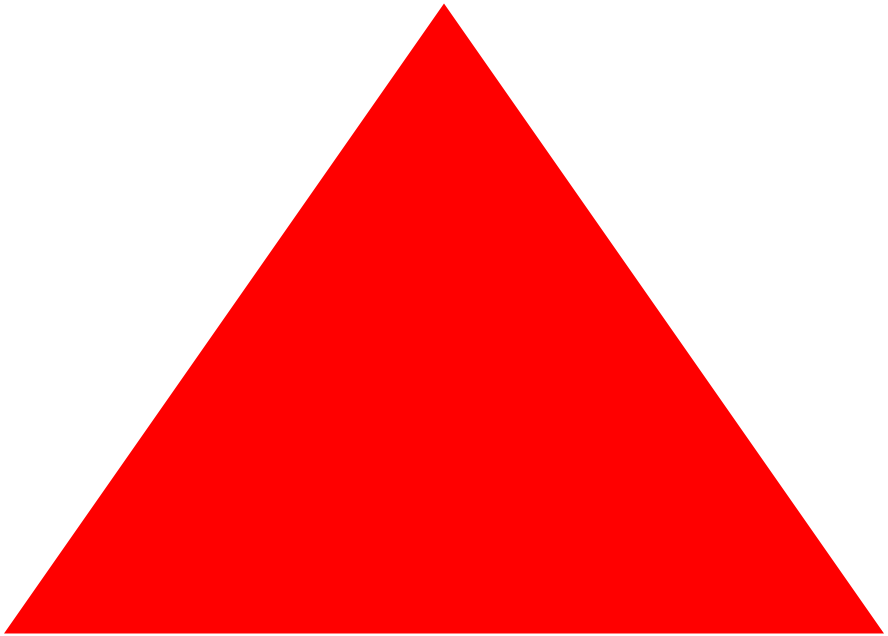
Insper

Framebuffer

Memória na placa gráfica que será usada para produzir a imagem no monitor que estiver conectado.



Desenhando Triângulos

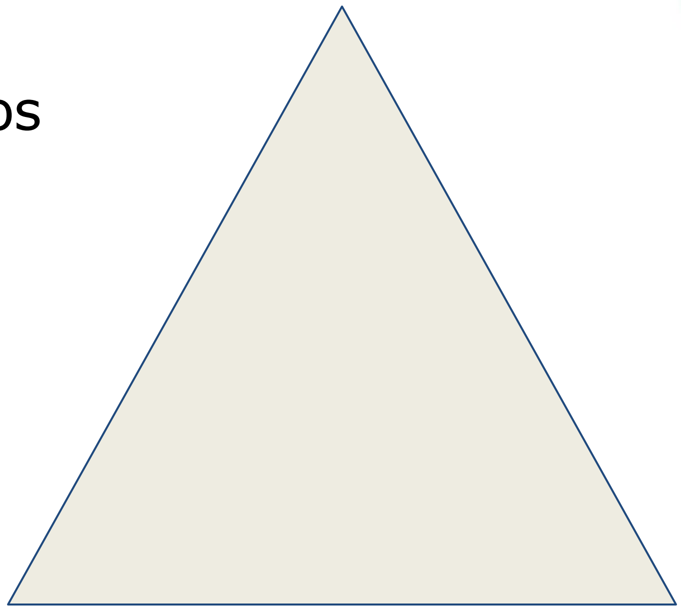


Aviso: Para essa aula estaremos trabalhando no espaço bidimensional (2D)

Triângulo – Primitiva Fundamental

Por que triângulos?

- Polígono mais simples possível
- Outros polígonos podem ser subdivididos em triângulos
- Podemos focar em otimizar um tipo de operação

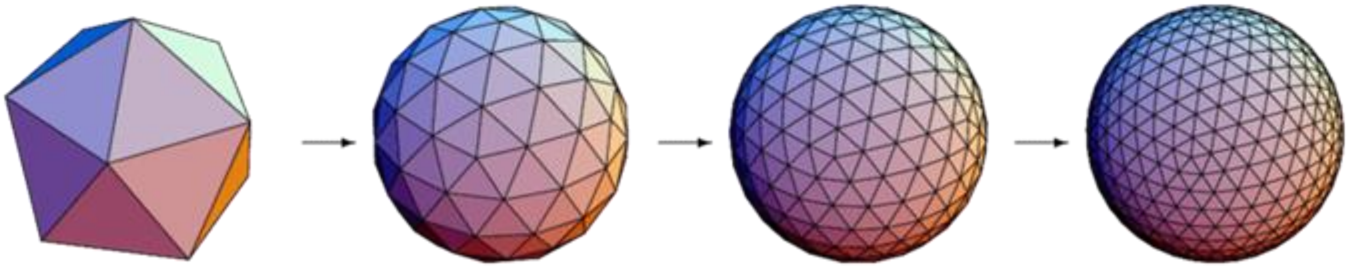


Triângulos têm propriedades únicas:

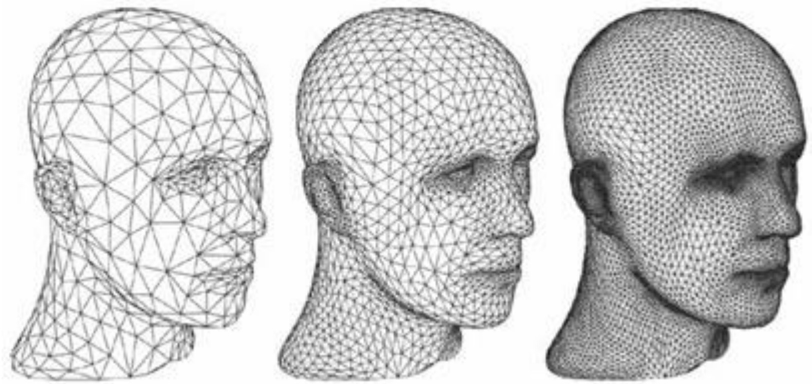
- São sempre planos
- Têm um interior bem definido
- Interpolar valores no seu interior é simples

Triângulos (High e Low Poly Count)

Os triângulos são um dos blocos básicos para criar formas e superfícies geométricas mais complexas.



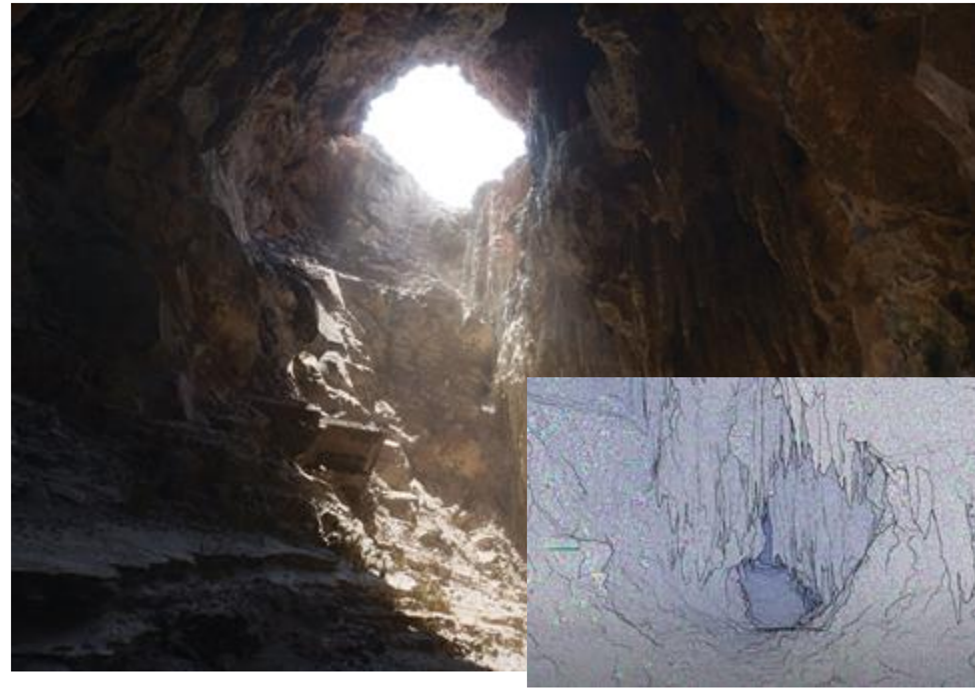
por Martin Styner



Insper

Low Poly e High Poly

Star Fox / SNES (1993)

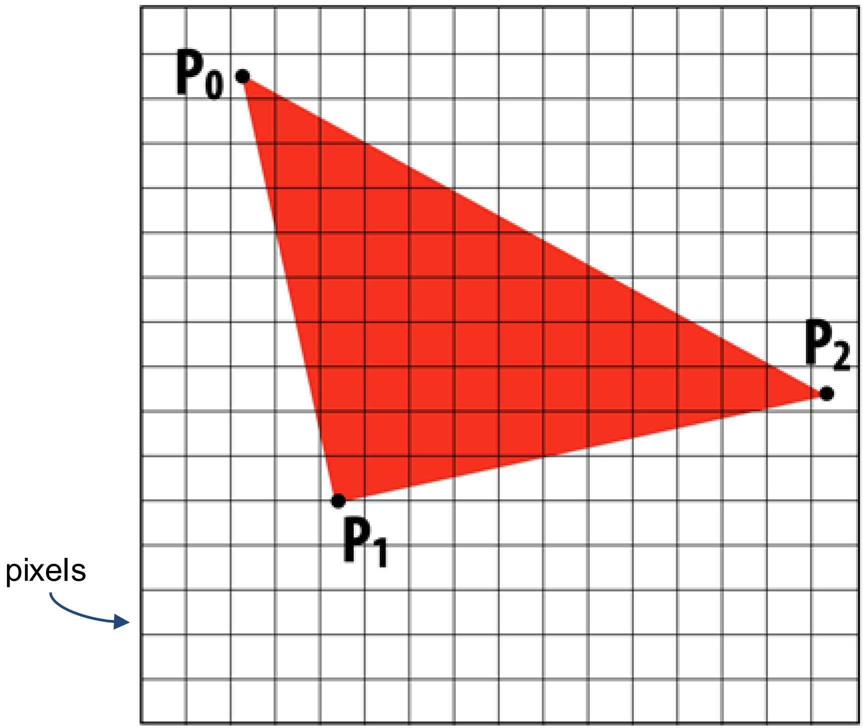


Unreal 5 / PS5 (2019)

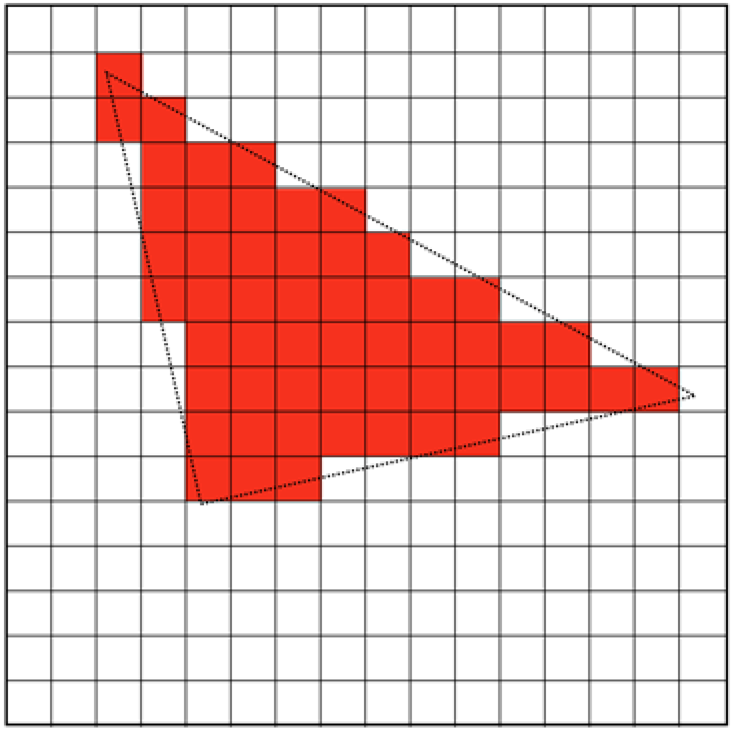
Desenhando um Triângulo no Framebuffer

Processo que chamamos de: Rasterização (triangle rasterization)

Entrada:
Posições projetadas dos vértices do triângulo

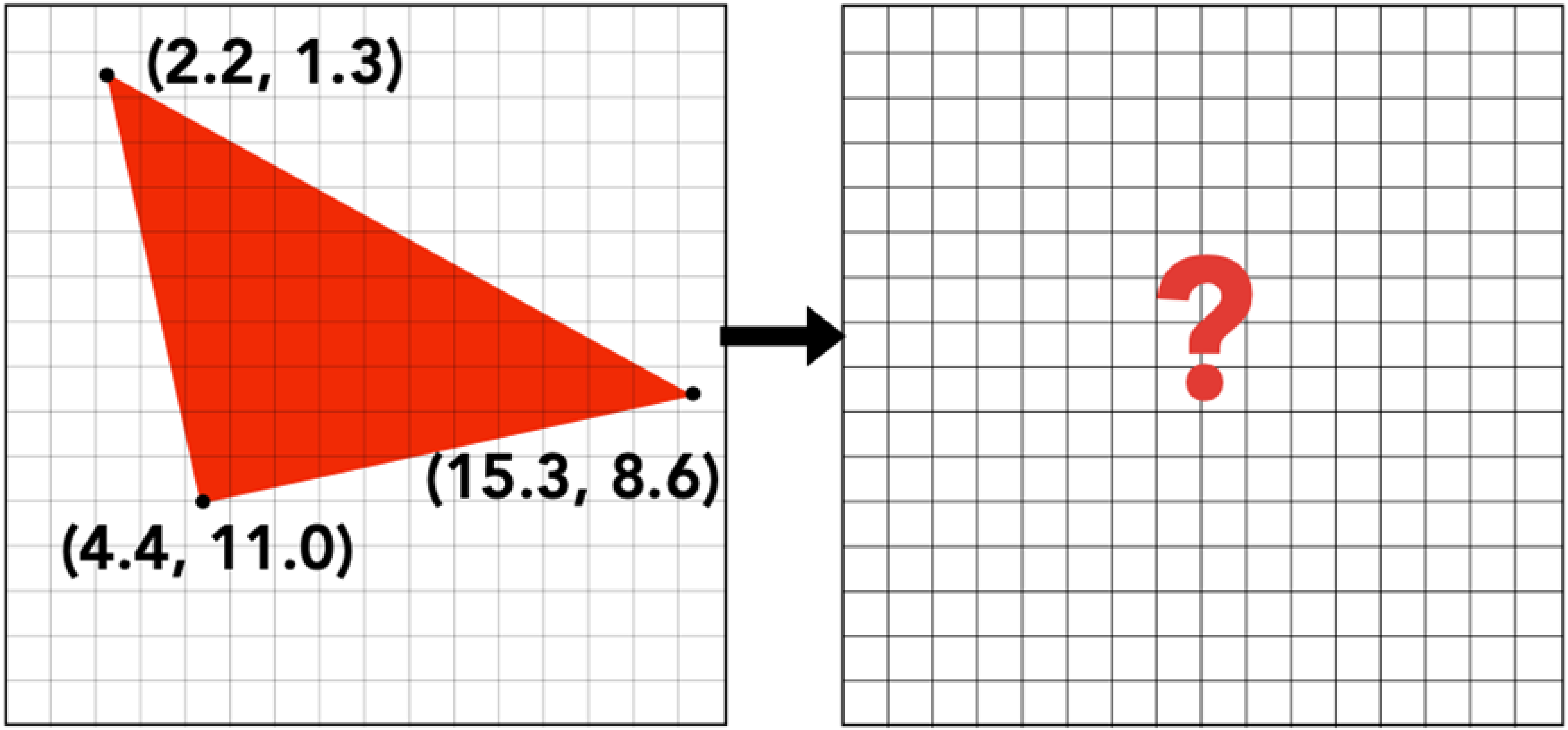


Saída:
conjunto de pixels coloridos pelo triângulo



Insper

Quais valores os pixels terão após a renderização?

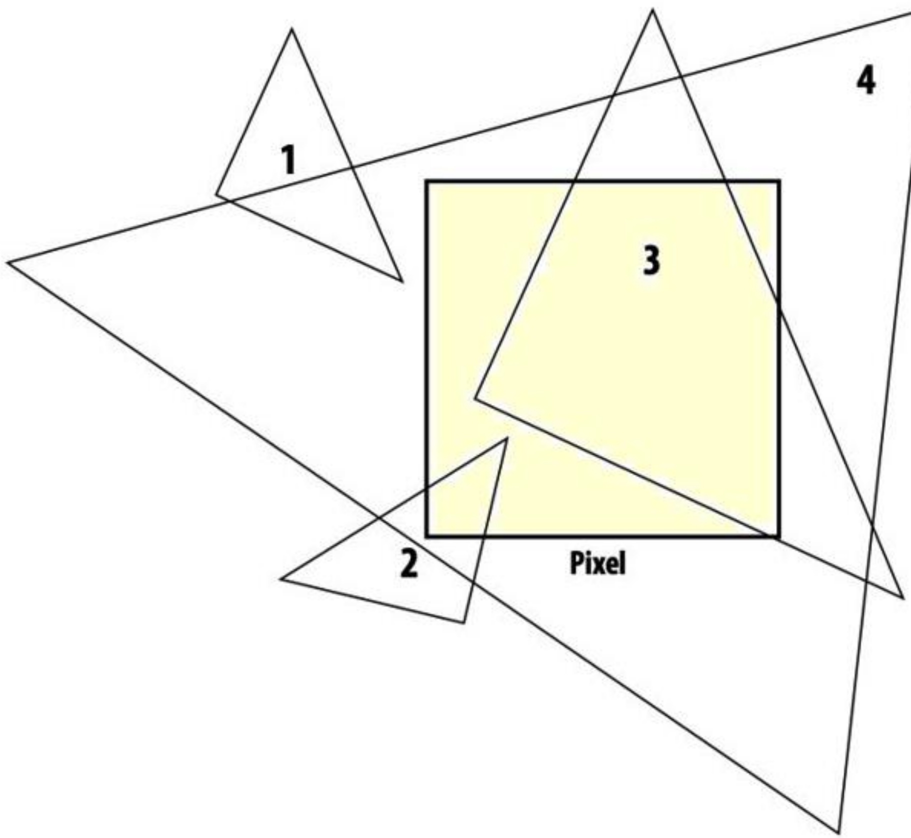


Alguns pixels são cobertos pelo triângulo outros não.

Insper

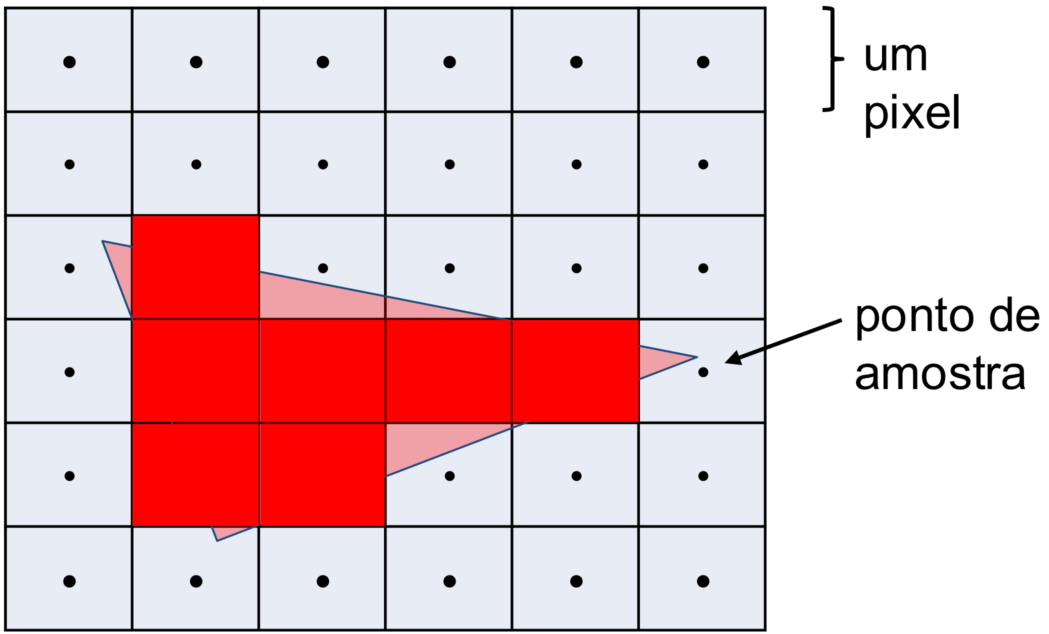
O que significa cobrir um pixel por triângulos?

Pergunta: quais triângulos "cobrem" este pixel?

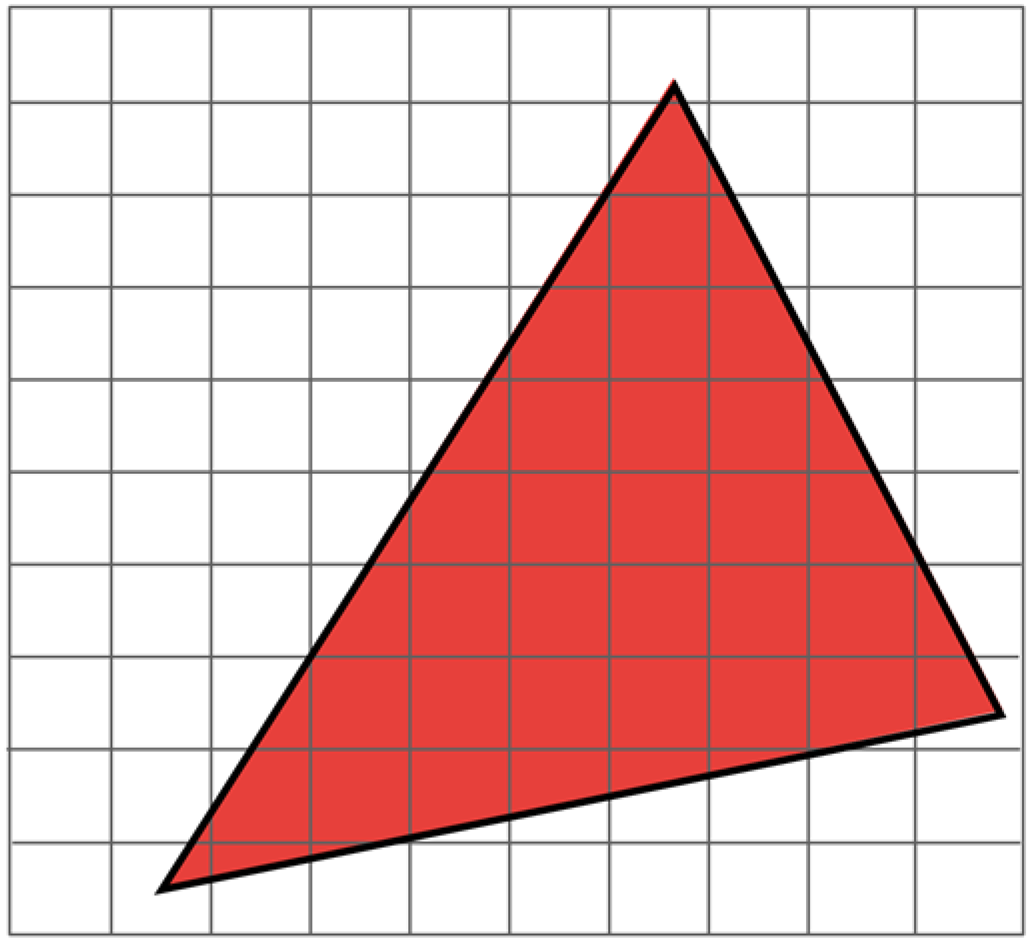


Desenhando os pixels dos triângulos

Uma forma de saber a cor do pixel é amostrando um ponto do pixel para coletar a cor do objeto.

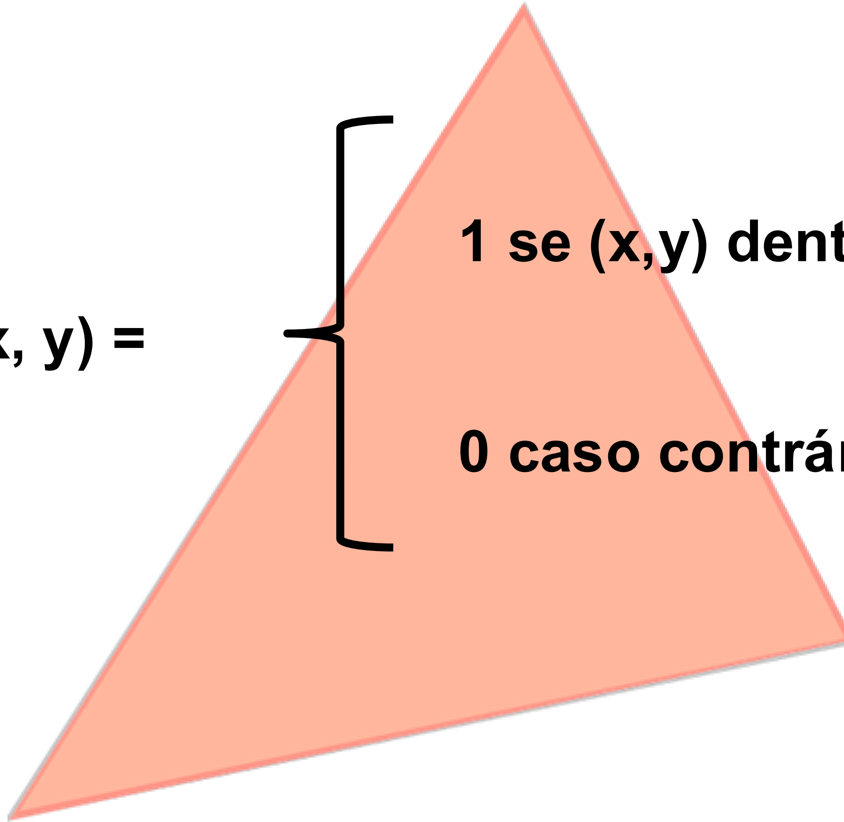


Desenhando um triângulo por amostragem 2D



Insper

Definindo uma função binária

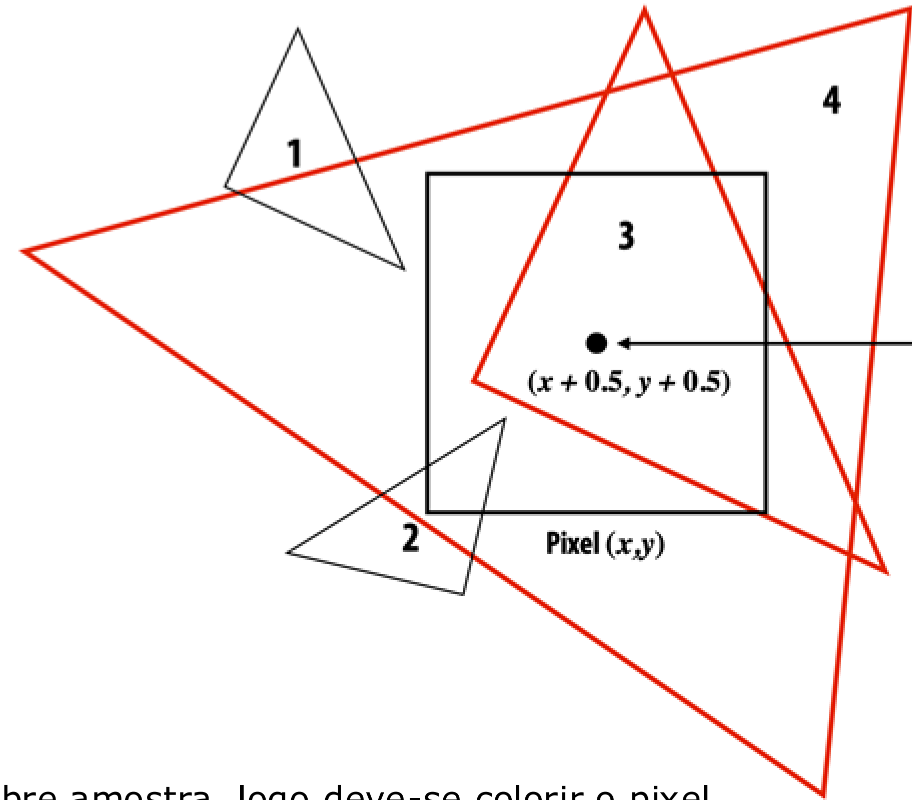


$$\textbf{inside(tri, x, y)} = \begin{cases} \textbf{1 se (x,y) dentro do triângulo} \\ \textbf{0 caso contrário} \end{cases}$$

tri = triângulo

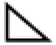
Nas APIs gráficas esse teste pode ser chamado de inside-outside test ou ainda coverage test.

Amostrando a função binária



Escolhi o centro do pixel para ser o local da amostragem


= triângulo cobre amostra, logo deve-se colorir o pixel


= triângulo não cobre a amostra, não colorir o pixel

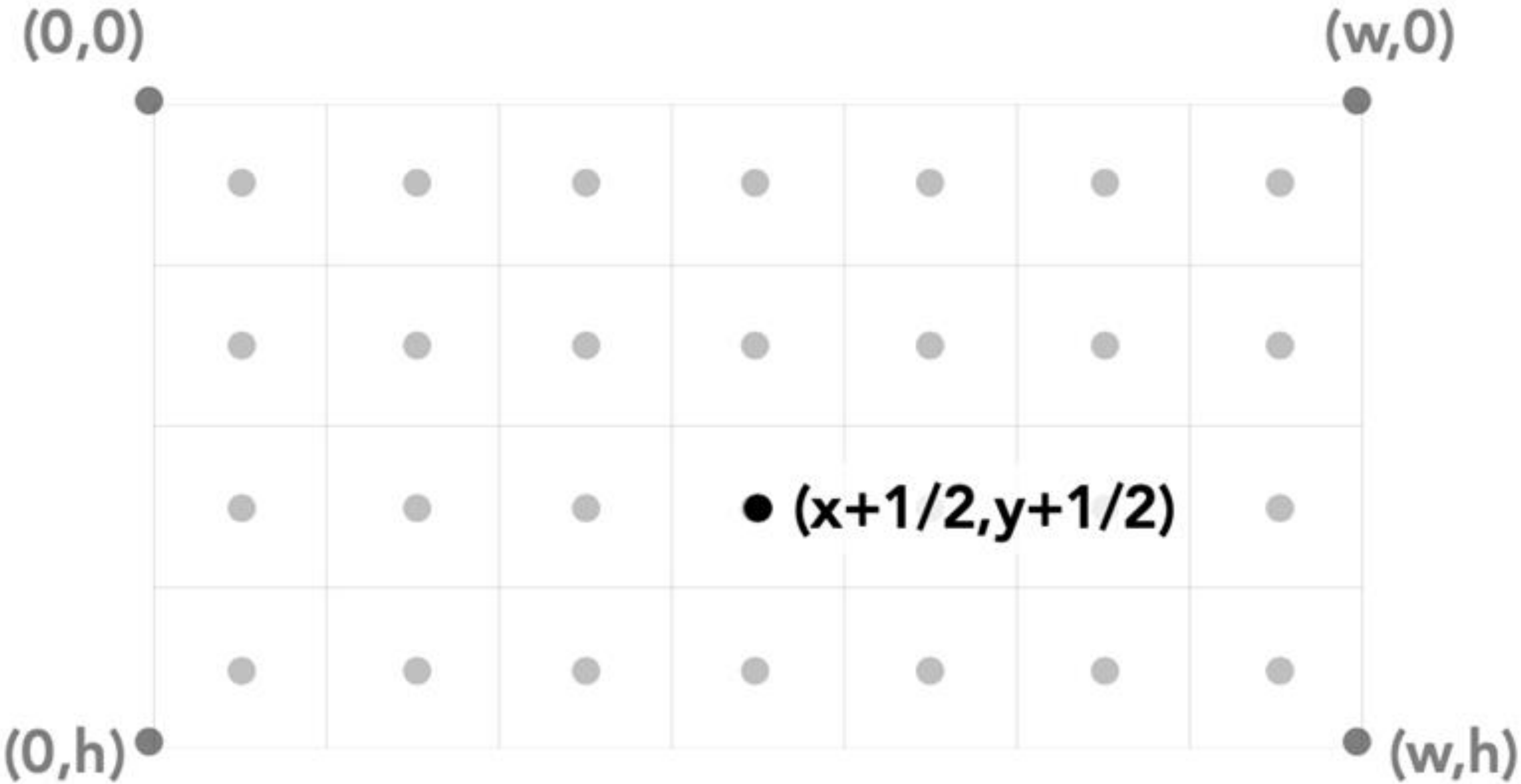
Rasterização

Amostrando os pixels de uma imagem

```
for (int x = 0; x < xmax; x++)
    for (int y = 0; y < ymax; y++)
        image[x][y] = inside(tri, x + 0.5, y + 0.5);
```

<u>Lembrando que ainda devemos ter n triângulos na nossa cena.</u>

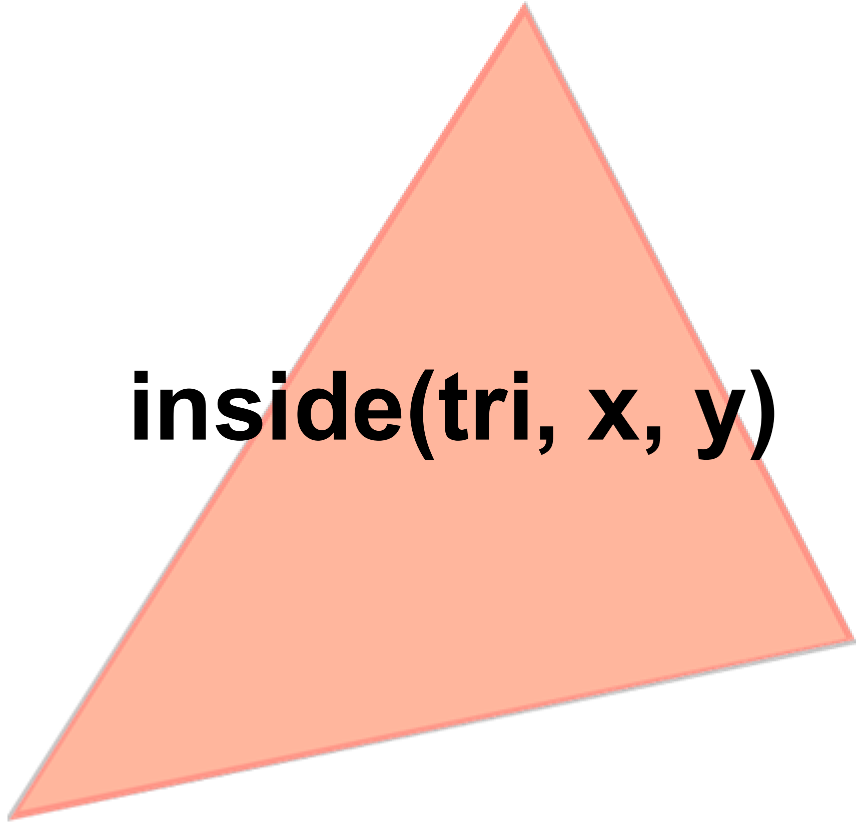
Detalhes: Localização da Amostra



Localização da amostra para pixel (x, y)

Insper

Avaliando se dentro do triângulo

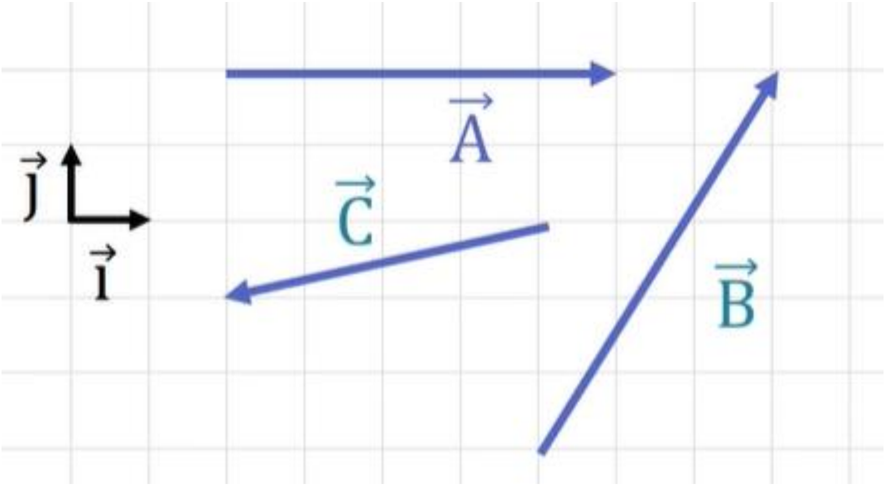


Mas como saber se está dentro do triângulo?
Antes disso: como definimos um triângulo?

Notações Básicas em Matemática

Vetor: entidade com magnitude (ou comprimento), direção e sentido.
representação: $\vec{v}$

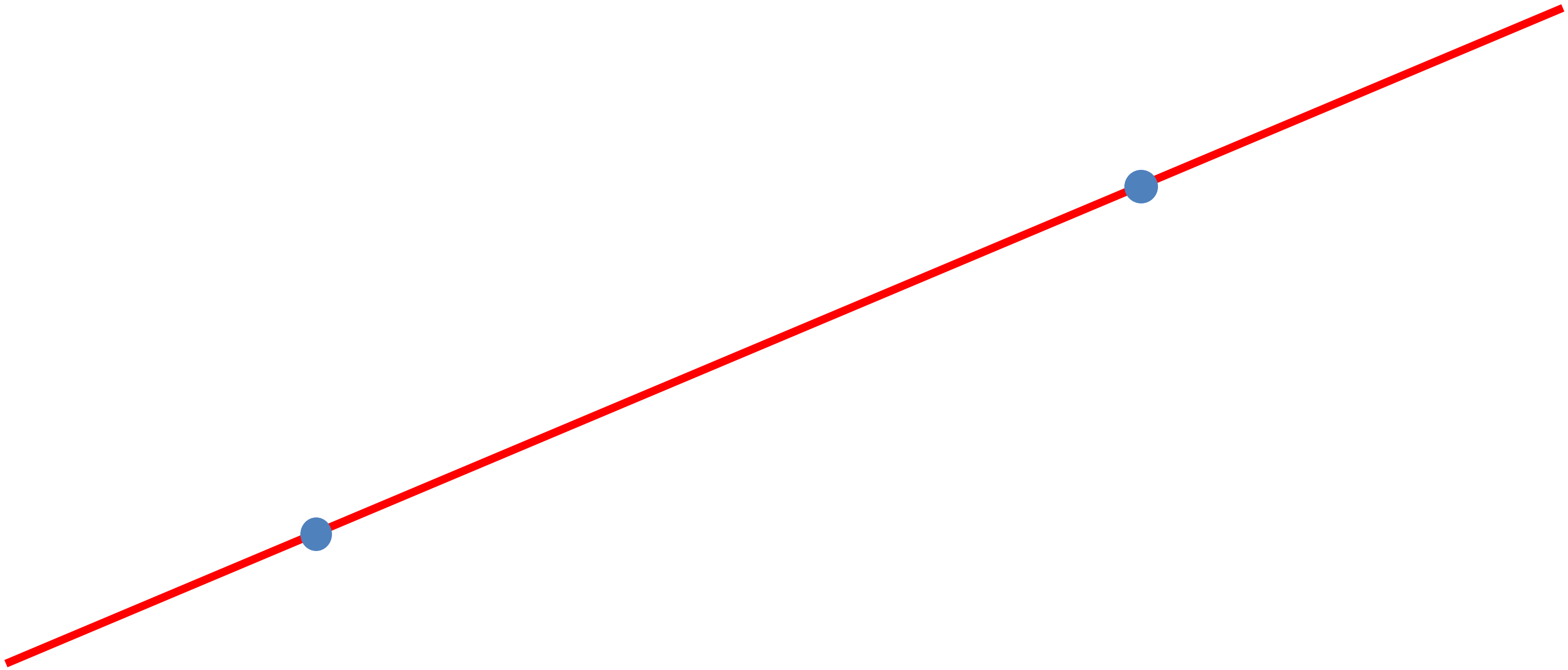
Versor: vetor unitário
representação: $\hat{\imath}$



exemplo

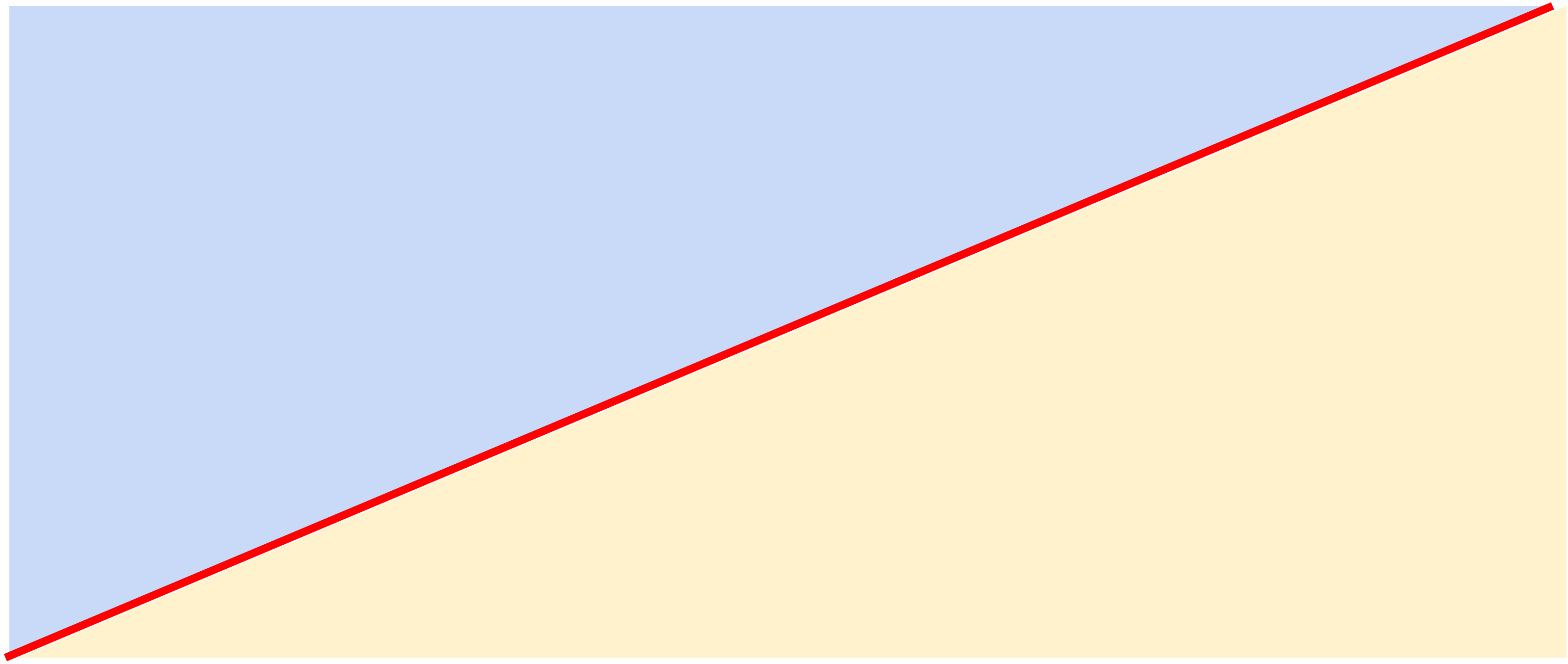
Reta

Dois pontos definem uma reta.



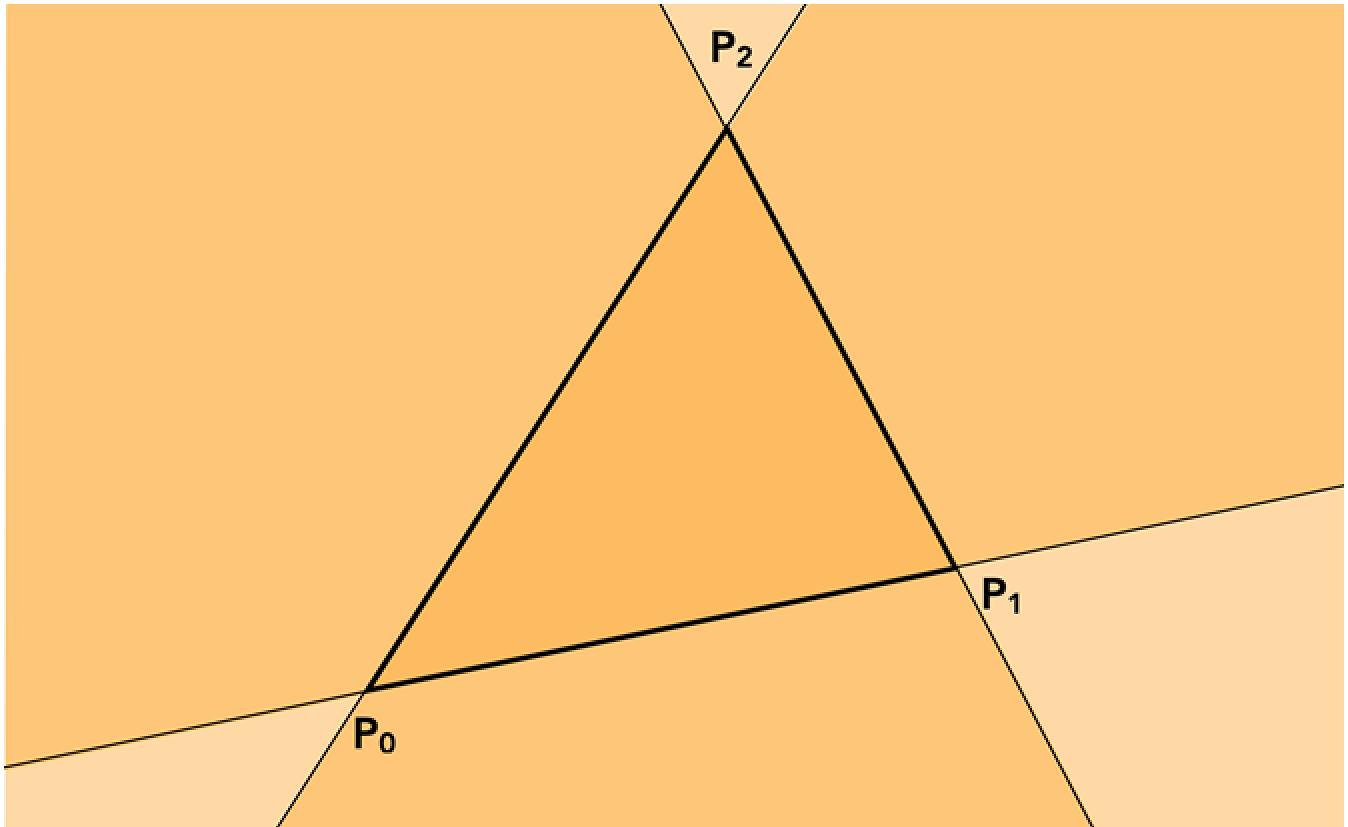
Triângulo

Toda reta divide o plano em que está contida em dois semiplanos



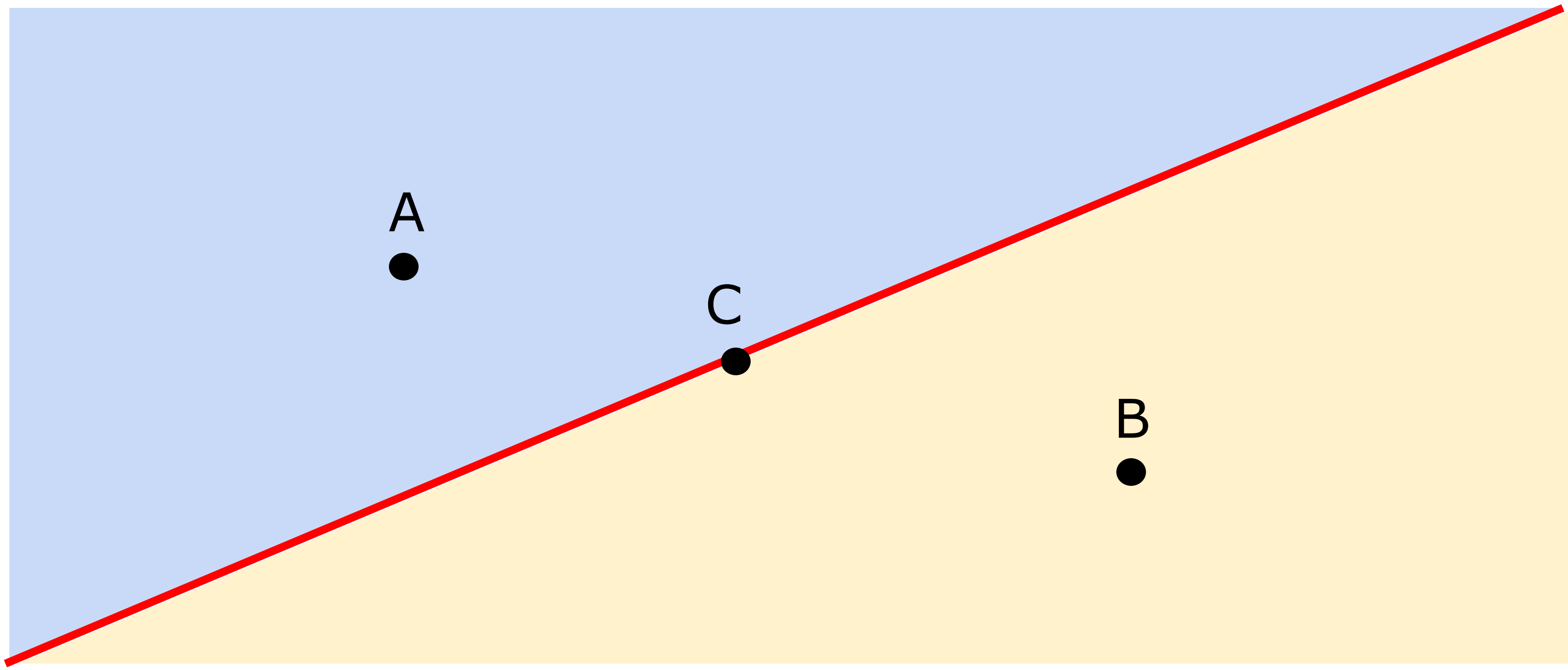
Triângulo

Podemos entender um triângulo como a interseção de três semiplanos



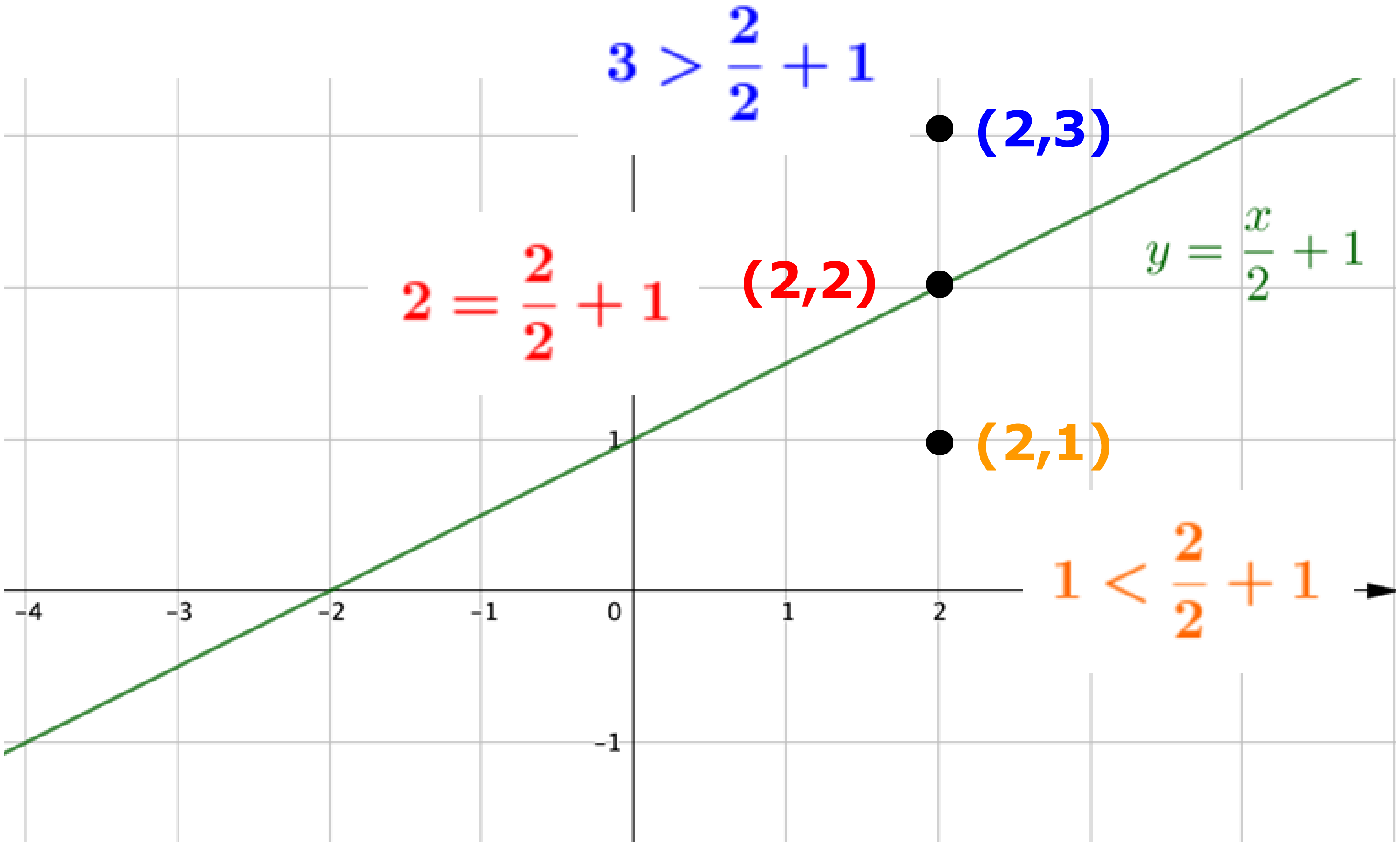
Triângulo

Como decidir em qual semiplano se encontra um ponto dado?



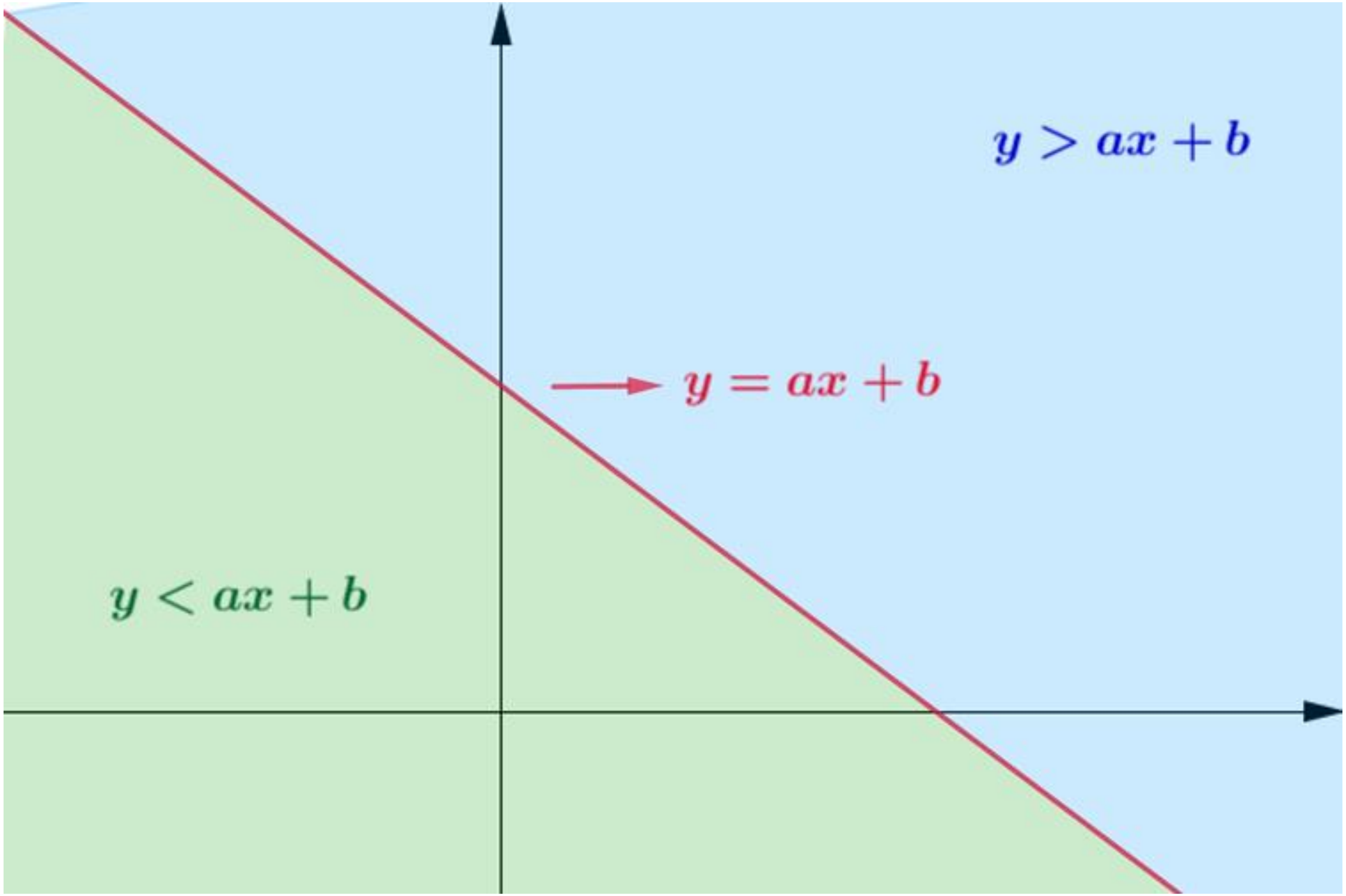
Insper

Geometria Analítica - Ensino Médio



Insper

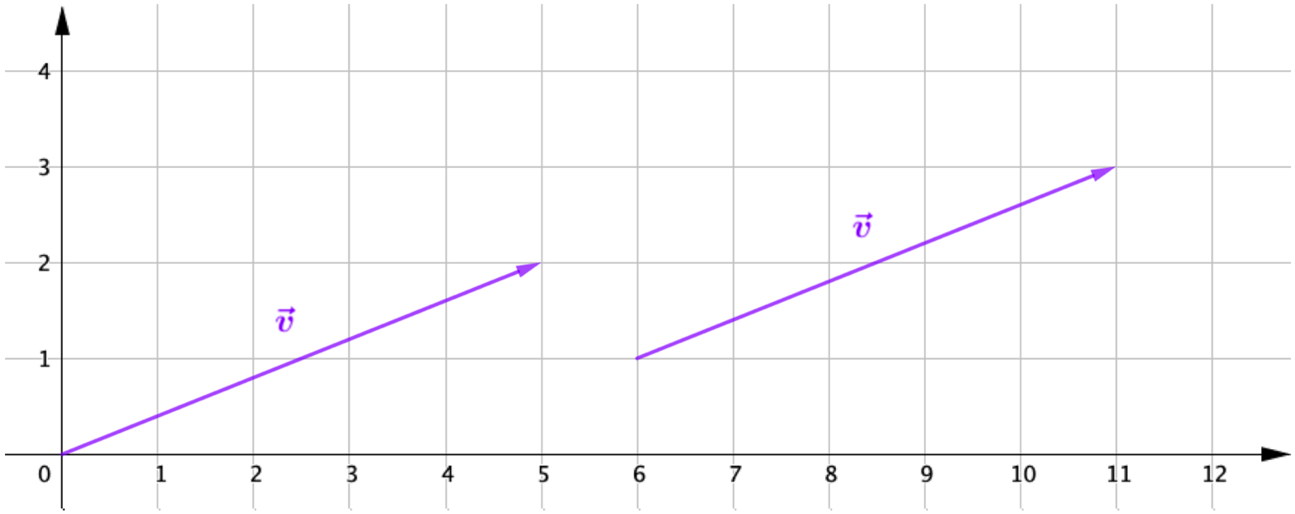
Geometria Analítica - Ensino Médio



Insper

Vetores e a Reta

Neste curso, será fundamental lidar com vetores. Vamos, então, fazer uma abordagem vetorial para nosso problema.

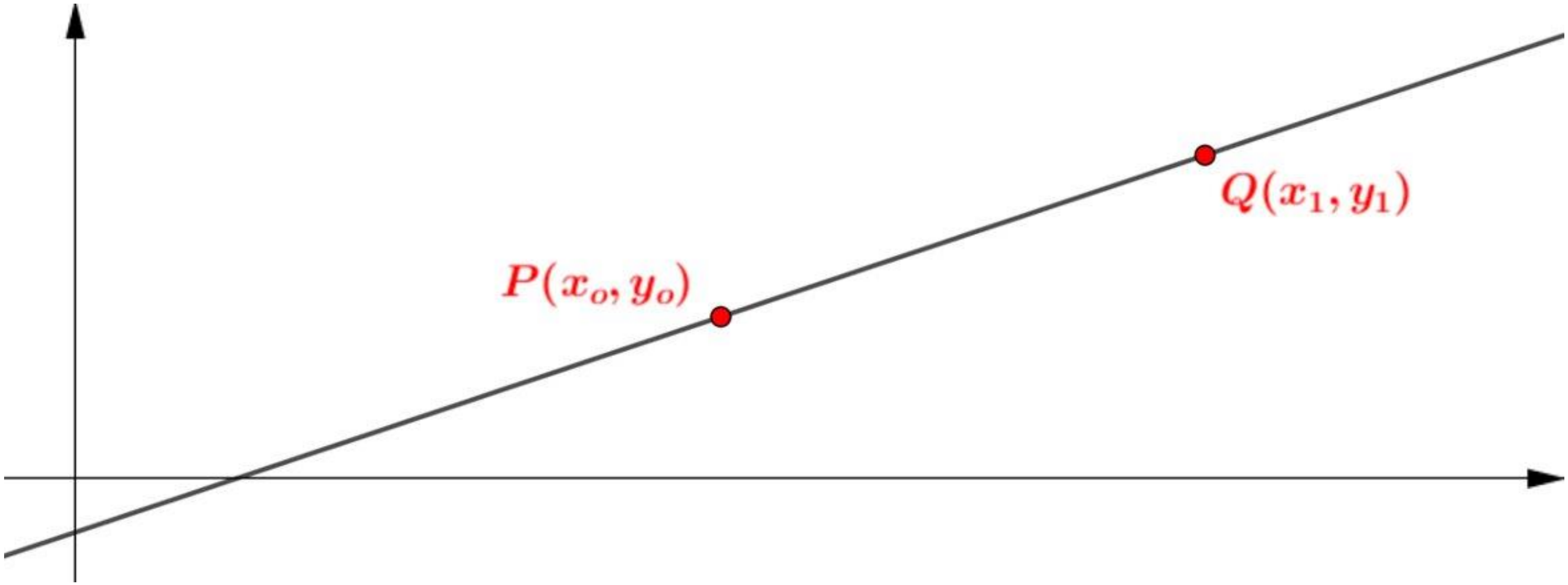


$$\vec{v} = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$$

$$\vec{v} = (5,2)$$

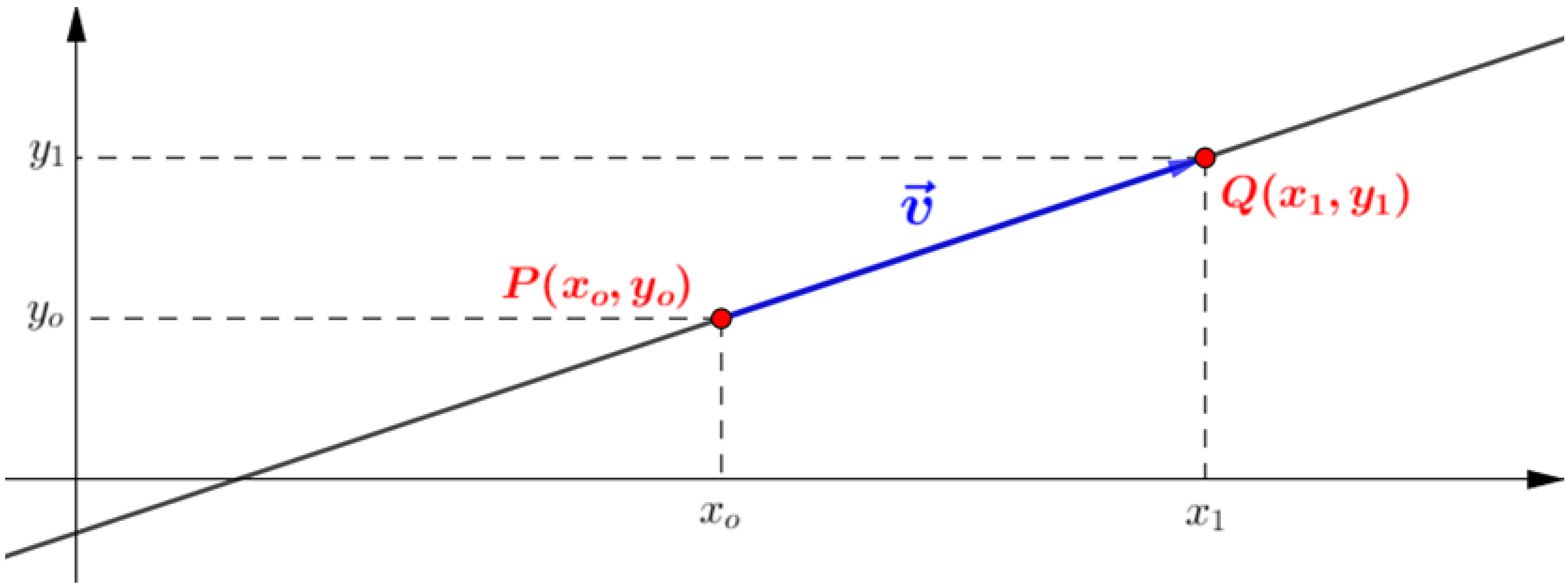
Vetores e a Reta

Vetor diretor de uma reta



Vetores e a Reta

Vetor diretor de uma reta



$$\vec{v} = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_o)$$

Insper

Recordando o produto escalar

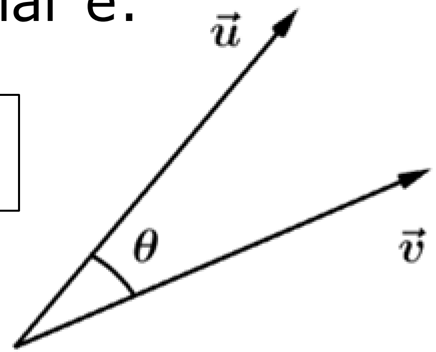
Todos se lembram disso?

O **produto escalar** (ou interno) entre dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ é:

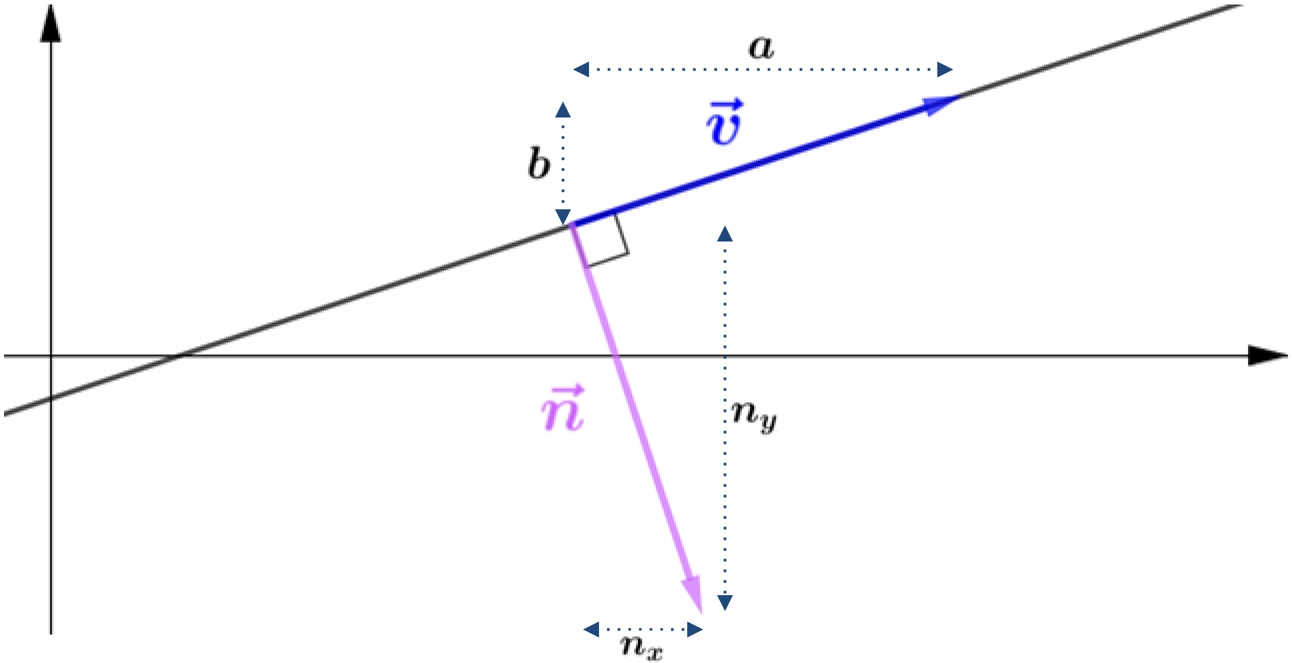
$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2}$$

Podemos também falar que o produto escalar é:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, \cos\theta}$$



Vetor normal à reta no plano



$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(a, b) \cdot (n_x, n_y) = 0$$

Escolhendo $n_x = b$:

$$(a, b) \cdot (b, n_y) = 0$$

$$ab + b \cdot n_y = 0$$

$$n_y = -a$$

Então:

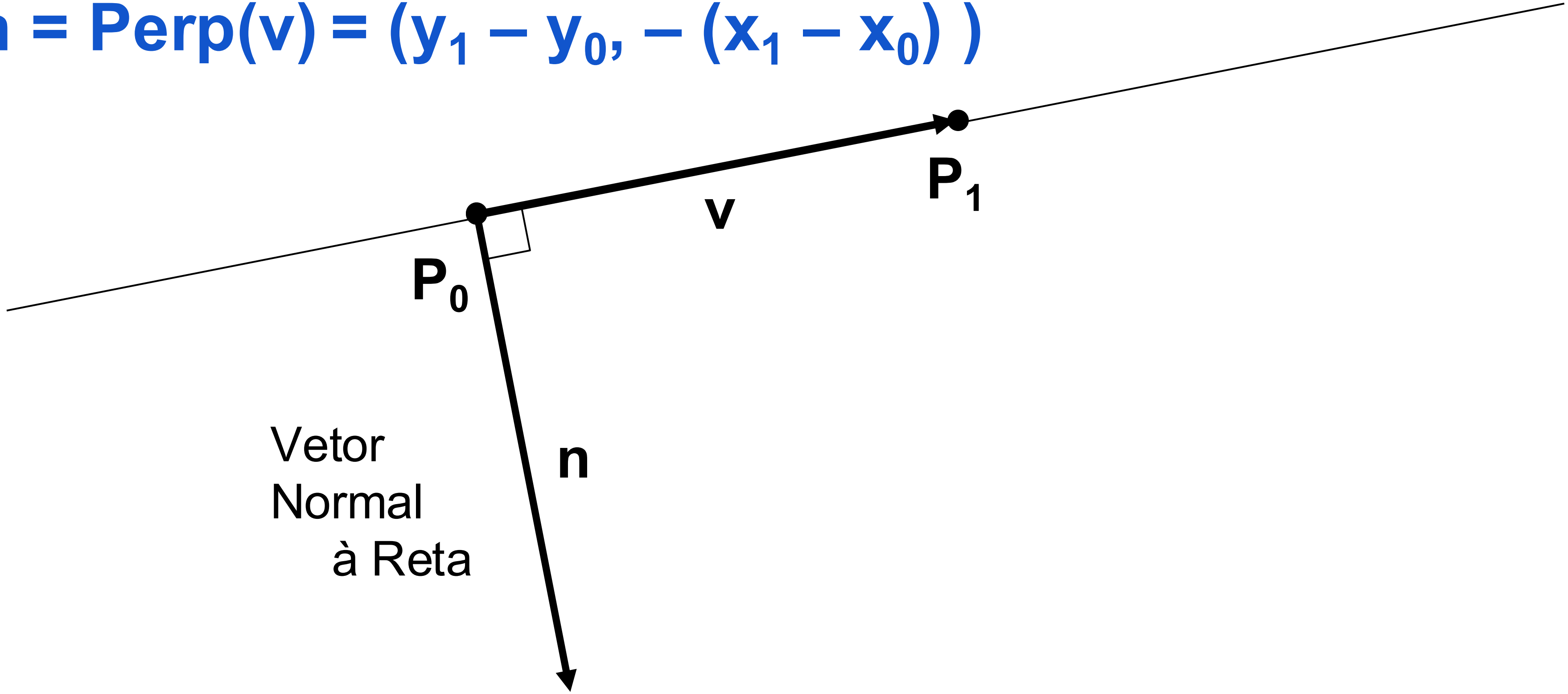
$$\vec{n} = (b, -a)$$

Insper

Trabalhando com o Vetor Normal

$v = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$

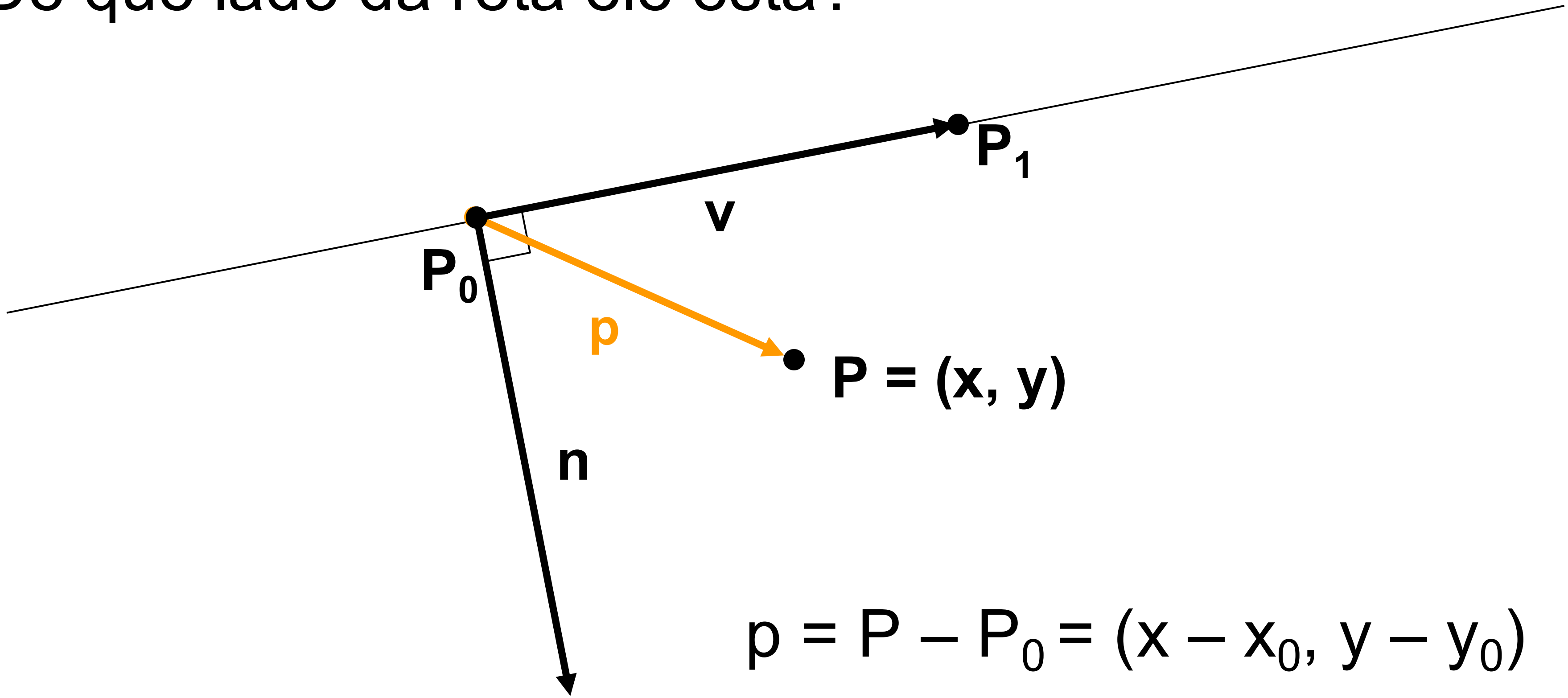
$$\mathbf{n = Perp(v) = (y_1 - y_0, -(x_1 - x_0))}$$



Insper

Trabalhando com o Vetor Normal

Considere um ponto qualquer do plano, P = (x, y).
De que lado da reta ele está?



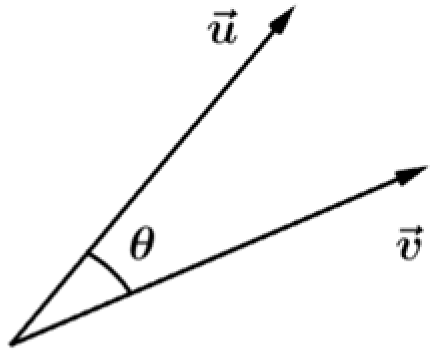
$$p = P - P_0 = (x - x_0, y - y_0)$$

Insper

Como já dissemos...

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais ($\theta = \pi/2$) se, e somente se, o produto escalar entre eles é zero:

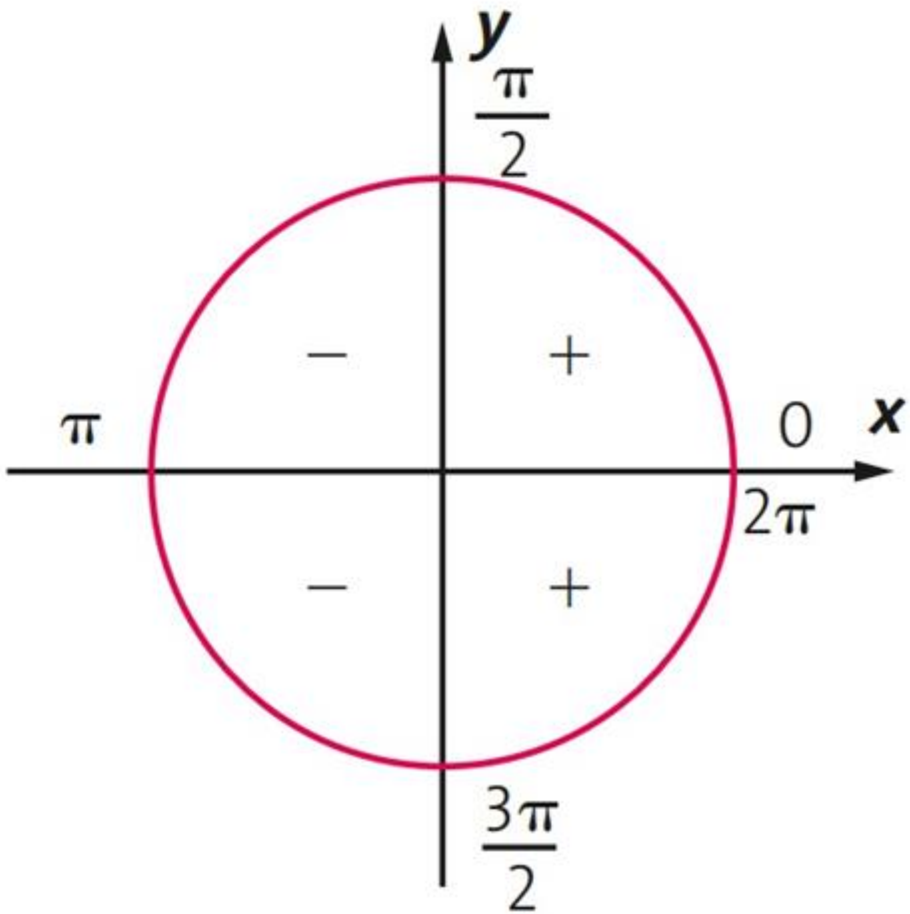
$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$



E se for positivo ou negativo?

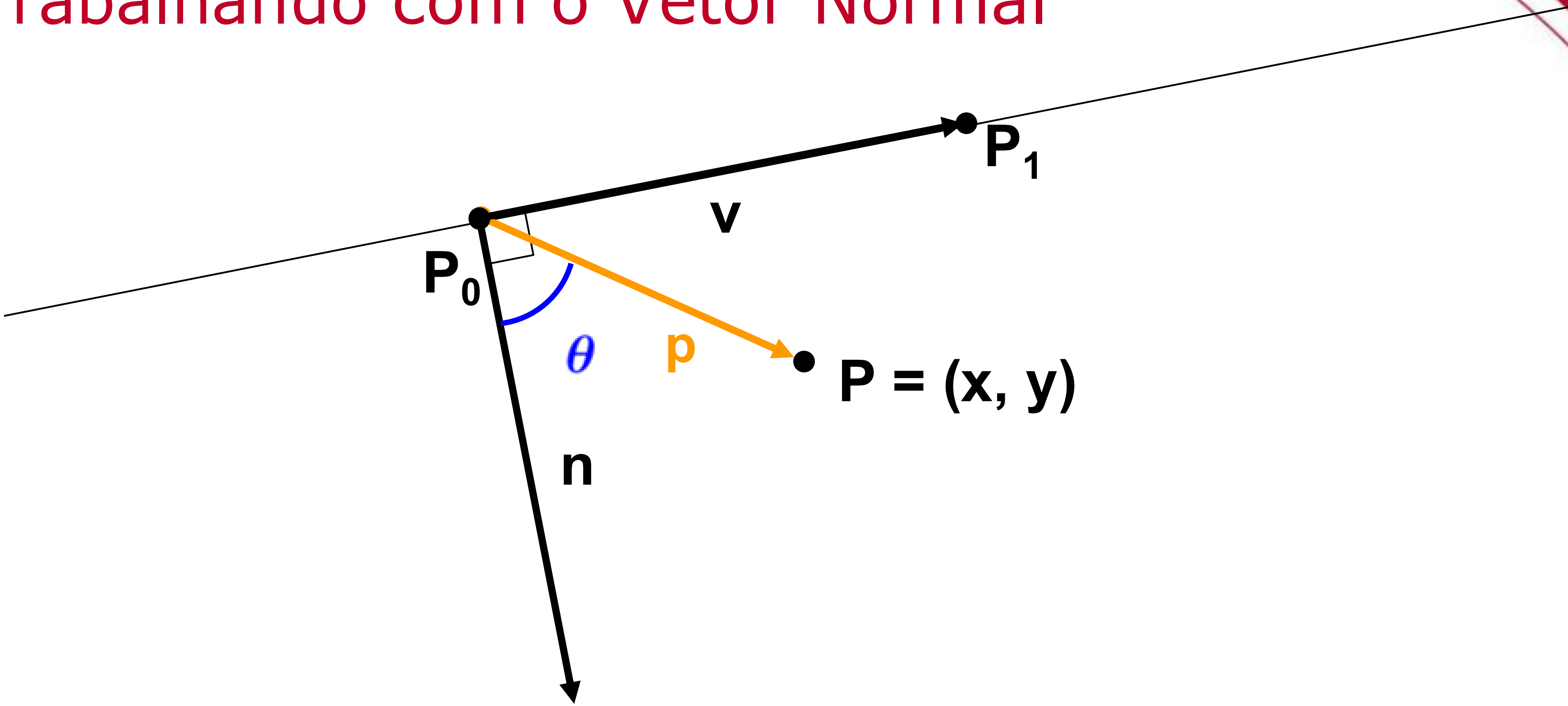
$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||\ \cos\theta}$$

Cosseno



Insper

Trabalhando com o Vetor Normal



- Se $0 \leq \theta < \pi/2$, P está no mesmo semiplano que n.
- Se $\theta = \pi/2$, P pertence à reta.
- Se $\pi/2 < \theta \leq \pi$, P e n estão em semiplanos opostos.

Insper

Trabalhando com o Vetor Normal

- Se $0 \leq \theta < \pi/2$, P está no mesmo semiplano que n.

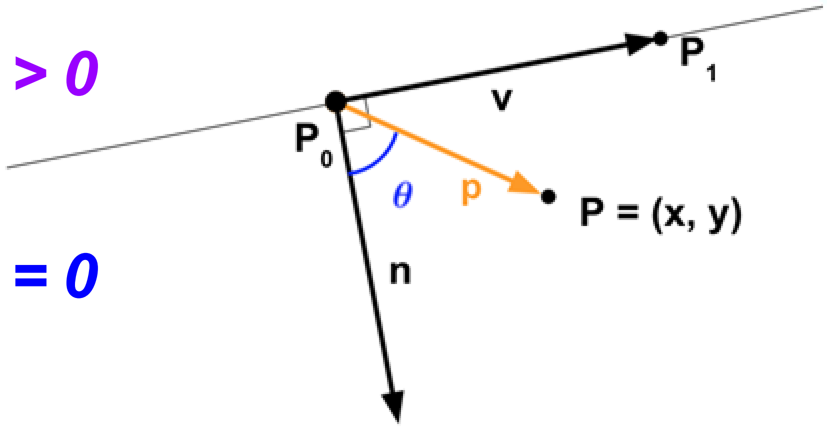
$p \bullet n > 0$

- Se $\theta = \pi/2$, P pertence à reta.

$p \bullet n = 0$

- Se $\pi/2 < \theta \leq \pi$, P e n estão em semiplanos opostos.

$p \bullet n < 0$



$$L(x, y) = p \bullet n = (x - x_0\, ; y - y_0) \bullet (y_1 - y_0\, ; -(x_1 - x_0))$$

$$= (x - x_0)(y_1 - y_0) - (y - y_0)(x_1 - x_0)$$

$$= (y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y + y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0)$$

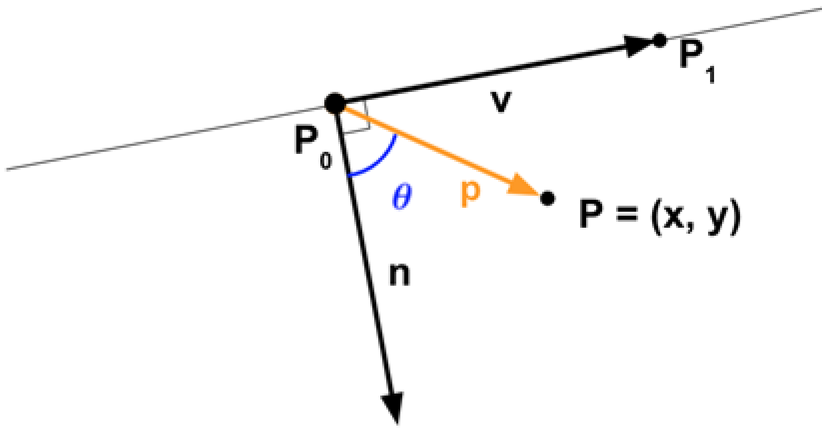
Trabalhando com o Vetor Normal

$$L(x, y) = p \bullet n = (x - x_0\,;\, y - y_0) \bullet (y_1 - y_0\,;\, -(x_1 - x_0))$$

$$= (x - x_0)(y_1 - y_0) - (y - y_0)(x_1 - x_0)$$

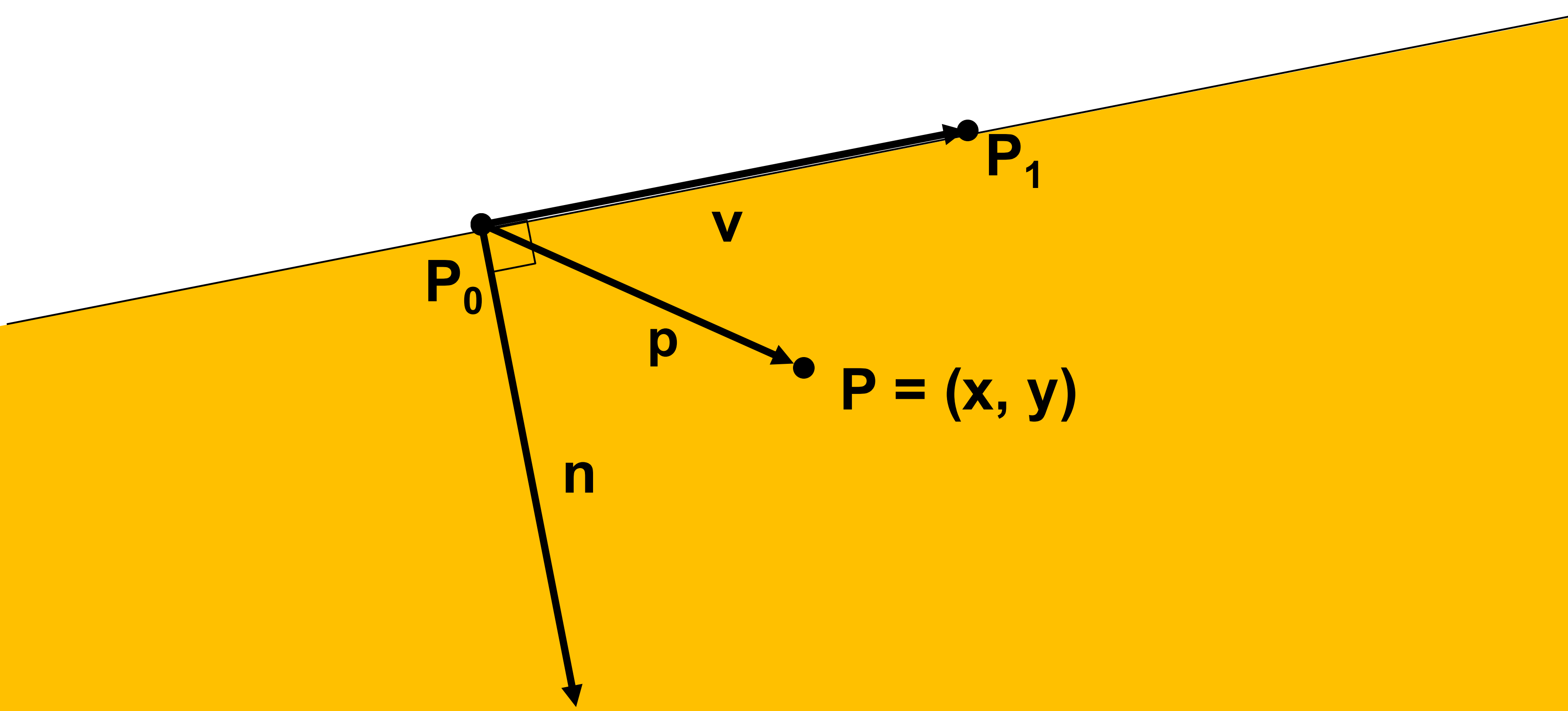
$$= (y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y + y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0)$$

$$L(x, y) = p \bullet n = \boldsymbol{Ax + By + C}$$



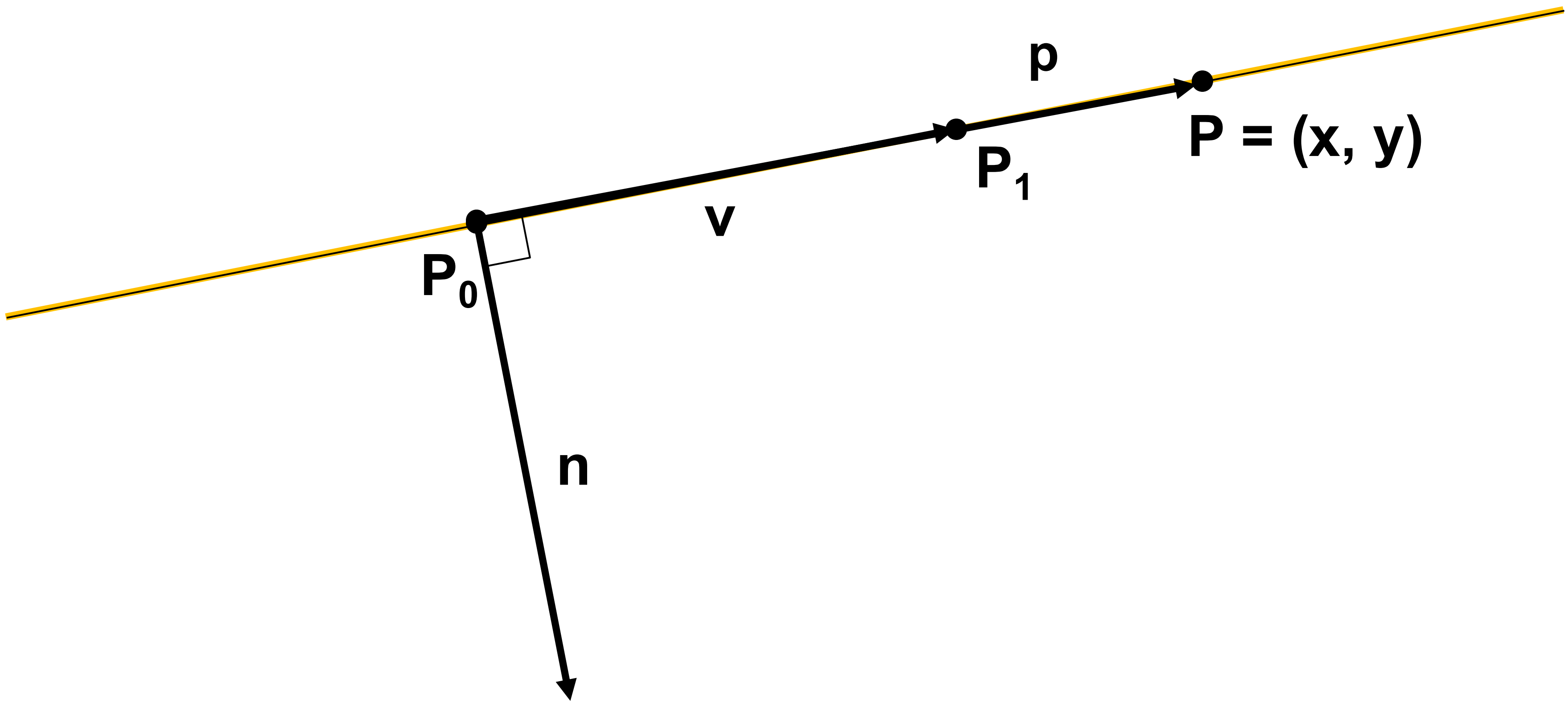
Testando o Ponto na Equação

$L(x, y) = p \bullet n \;\; > 0$



Testando o Ponto na Equação

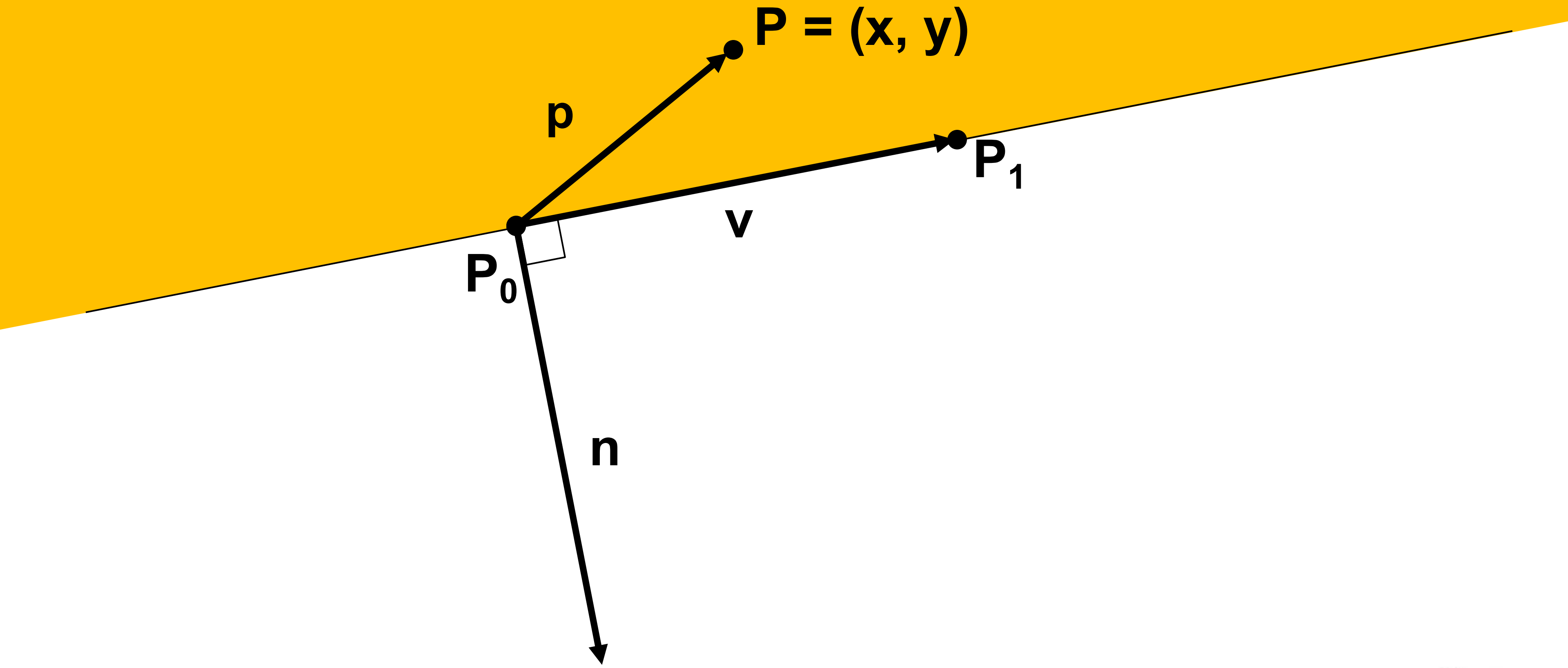
$L(x, y) = p \bullet n = 0$



Insper

Testando o Ponto na Equação

$L(x, y) = p \bullet n < 0$



Insper

Alternativa para organizar o teste de borda

Essa expressão também pode ser organizada com auxílio da matriz:

$$\begin{bmatrix} (x - x_0) & (y - y_0) \\ (x_1 - x_0) & (y_1 - y_0) \end{bmatrix}$$

Se definirmos $A = (P - P_0)$ e $B = (P_1 - P_0)$

$$\begin{bmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{bmatrix}$$

O determinante dessa matriz é:

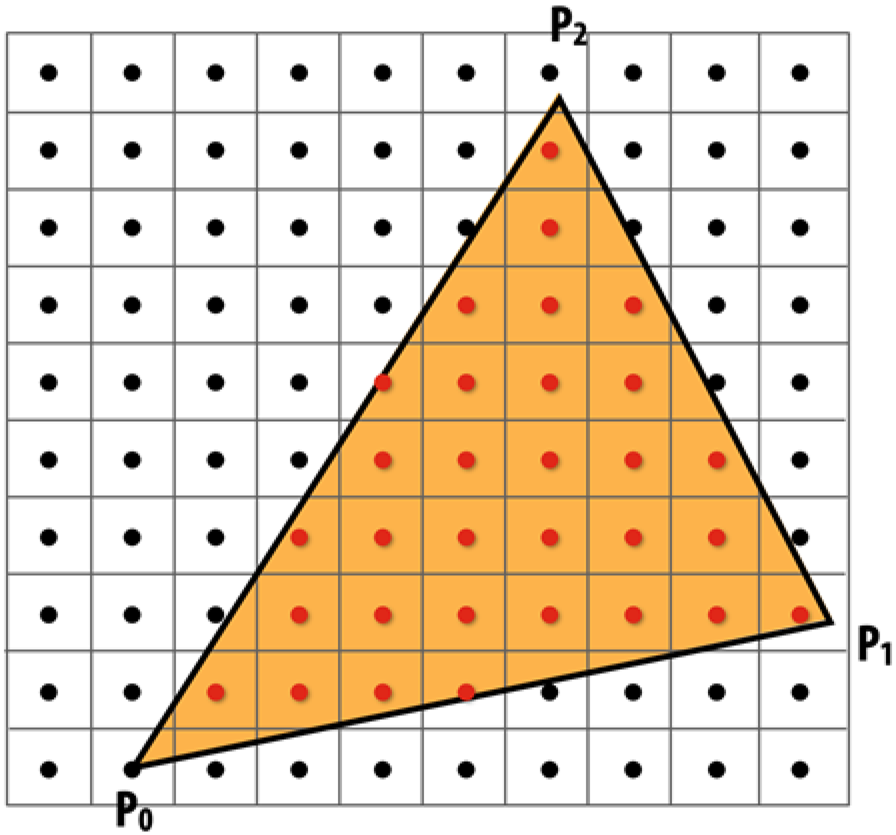
$$A_x * B_y - A_y * B_x$$

Teste do ponto no triângulo

O ponto amostrado s = (sx, sy) está dentro do triângulo se estiver "dentro" em relação aos três lados.

$$inside(sx, sy) = \\ L_0(sx, sy) < 0 \; \&\& \\ L_1(sx, sy) < 0 \; \&\& \\ L_2(sx, sy) < 0;$$

Nota: na prática não são feitos tantos testes assim, existem várias otimizações

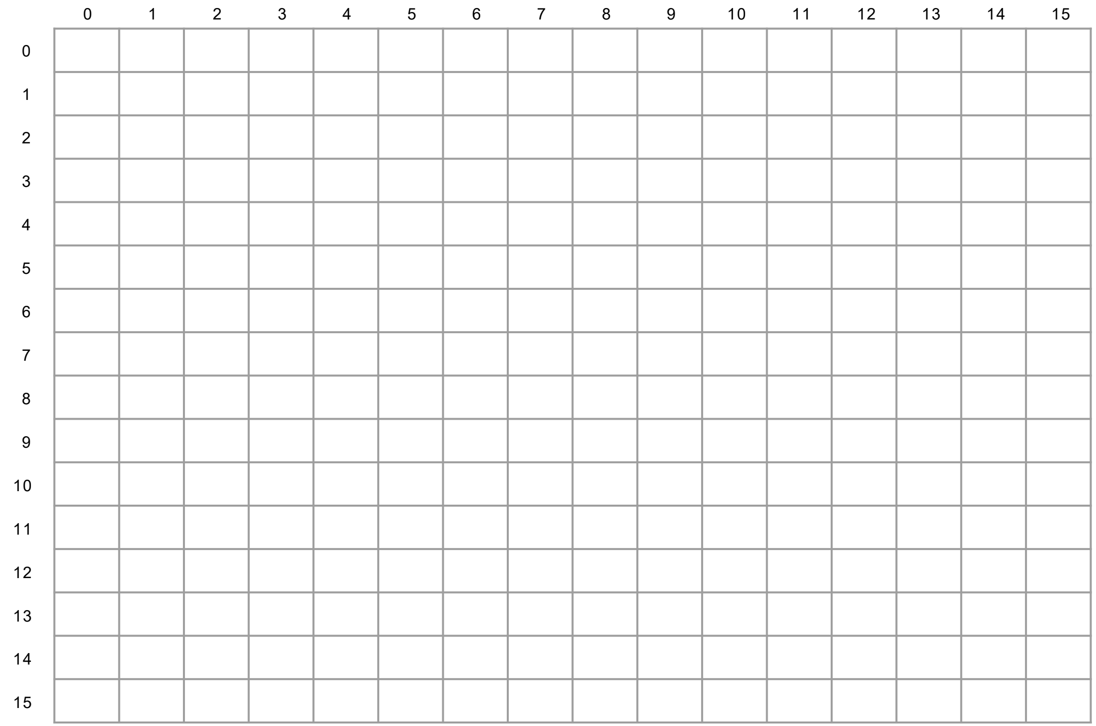


Insper

Teste do ponto no triângulo

É preciso tomar um cuidado: fizemos as contas com o eixo y no sentido convencional (apontando para cima).

Porém, é muito comum adotamos o sentido contrário (apontando para baixo) para representar telas na Computação Gráfica.



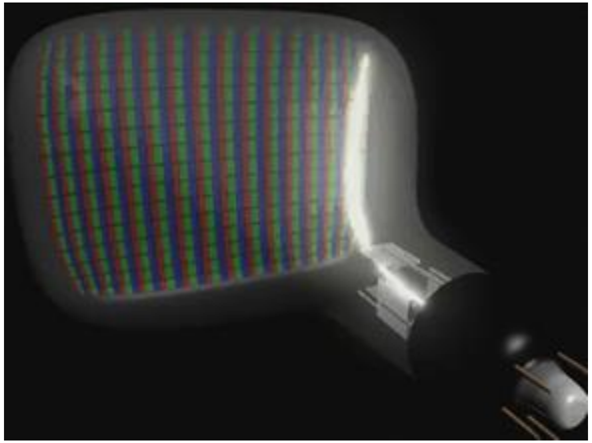
Assim, as relações ficam:

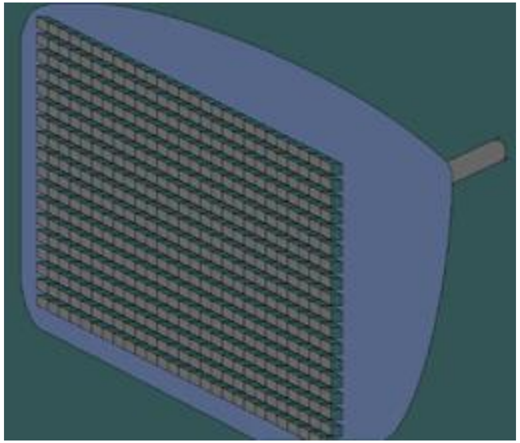
$$
\begin{aligned}
&inside(sx, sy) = \\
&\quad L_0(sx, sy) > 0 \;\&\& \\
&\quad L_1(sx, sy) > 0 \;\&\& \\
&\quad L_2(sx, sy) > 0;
\end{aligned}
$$

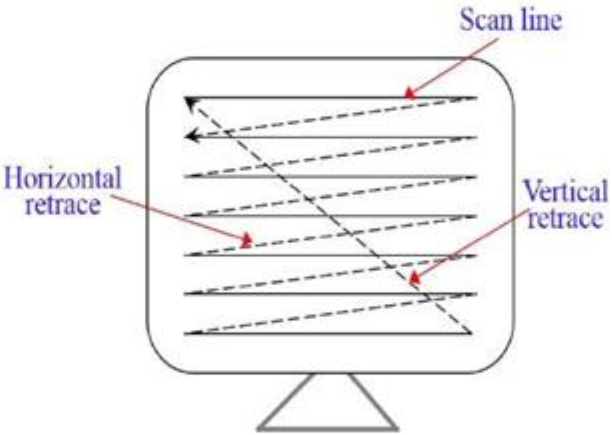
Eixos das Imagens

"However, in computer graphics and image processing one often uses a coordinate system with the y axis pointing down (as displayed on the computer's screen). This convention developed in the 1960s (or earlier) from the way that images were originally stored in display buffers."

Fonte: https://simple.wikipedia.org/wiki/User:Jeffwang/Cartesian_coordinate_system



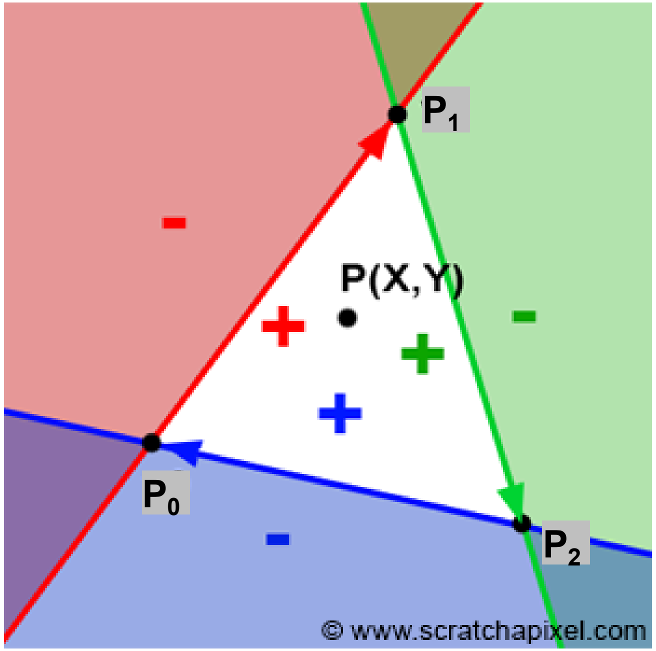




Insper

Se todos os 3 testes forem positivos

Estamos dentro do triângulo



Esse teste é baseado na estratégia conhecida como Edge Function, proposto por Juan Pineda em 1988 no paper "**A Parallel Algorithm for Polygon Rasterization**".

Atividade

Identifique se o pixel está dentro ou fora do triângulo realizando os cálculos manualmente.

Triângulo: $P_0 = (2,11)$ $P_1=(11,7)$ $P_2=(6, 2)$

Pixels: $A = (5, 7)$ $B=(9, 5)$ $C=(8, 13)$

$$\mathbf{L(x, y) = (y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y + y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0)}$$

$$\mathbf{L(x, y) = (x - x0)(y1 - y0) - (y - y0)(x1 - x0)}$$

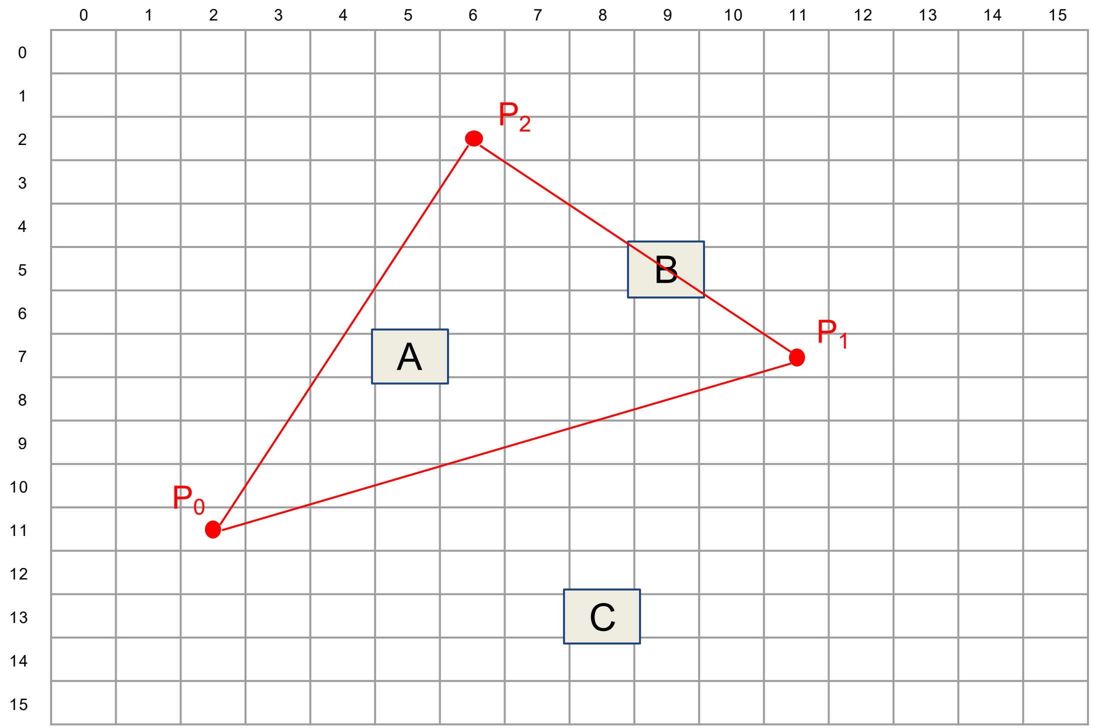
Se definirmos $A = (P - P_0)$ e $B = (P_1 - P_0)$ $\begin{bmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{bmatrix}$

Obs:

1. considere o eixo y invertido, assim verifique se as equações L(x, y) são positivas.
2. considere que os pontos P_0, P_1 e P_2 estão exatamente no centro do pixel (não adicione o 0,5).

Atividade

Identifique se o pixel está dentro ou fora do triângulo realizando os cálculos manualmente.



Resolvendo

$P_0 = (2,11)$ $P_1=(11,7)$ $P_2=(6, 2)$

$A = (5, 7)$ $B=(9, 5)$ $C=(8, 13)$

$$\boldsymbol{L(x, y) = (y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y + y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0)}$$

$$L_1(x, y) = (7 - 11)x - (11 - 2)y + 11(11 - 2) - 2(7 - 11)$$
$$L_1(x, y) = -4x - 9y + 107$$

$$L_2(x, y) = (2 - 7)x - (6 - 11)y + 7(6 - 11) - 11(2 - 7)$$
$$L_2(x, y) = -5x + 5y + 20$$

$$L_3(x, y) = (11 - 2)x - (2 - 6)y + 2(2 - 6) - 6(11 - 2)$$
$$L_3(x, y) = 9x + 4y - 62$$

$A = (5, 7)$ $B = (9, 5)$ $C = (8, 13)$

$L_1(x, y) = -4x - 9y + 107$

$L_2(x, y) = -5x + 5y + 20$

$L_3(x, y) = 9x + 4y - 62$

A)

$inside(5, 7) = L_1(5, 7) \geq 0 \;\&\&\; L_2(5, 7) \geq 0 \;\&\&\; L_3(5, 7) \geq 0$

$inside(5, 7) = -4*5 - 9*7 + 107 \geq 0 \;\&\&\; -5*5 + 5*7 + 20 \geq 0 \;\&\&\; 9*5 + 4*7 - 62 \geq 0$

$inside(5, 7) = -20 - 63 + 107 \geq 0 \;\&\&\; -25 + 35 + 20 \geq 0 \;\&\&\; 45 + 28 - 62 \geq 0$

$inside(5, 7) = 24 \geq 0 \;\&\&\; 30 \geq 0 \;\&\&\; 11 \geq 0$

inside(5, 7) = True (dentro)

B)

$inside(9, 5) = L_1(9, 5) \geq 0 \;\&\&\; L_2(9, 5) \geq 0 \;\&\&\; L_3(9, 5) \geq 0$

$inside(9, 5) = -4*9 - 9*5 + 107 \geq 0 \;\&\&\; -5*9 + 5*5 + 20 \geq 0 \;\&\&\; 9*9 + 4*5 - 62 \geq 0$

$inside(9, 5) = -36 - 45 + 107 \geq 0 \;\&\&\; -45 + 25 + 20 \geq 0 \;\&\&\; 81 + 20 - 62 \geq 0$

$inside(9, 5) = 26 \geq 0 \;\&\&\; 0 \geq 0 \;\&\&\; 39 \geq 0$

inside(9, 5) = True (dentro, intersectando um dos lados)

$A = (5, 7)$ $B=(9, 5)$ $C=(8, 13)$

$L_1(x, y) = -4x - 9y + 107$

$L_2(x, y) = -5x + 5y + 20$

$L_3(x, y) = 9x + 4y - 62$

C)

$\text{inside}(8, 13) = L_1(8, 13) \geq 0 \ \&\& \ L_2(8, 13) \geq 0 \ \&\& \ L_3(8, 13) \geq 0$

$\text{inside}(8, 13) = -4*8 - 9*13 + 107 \geq 0 \ \&\& \ -5*8 + 5*13 + 20 \geq 0 \ \&\& \ 9*8 + 4*13 - 62 \geq 0$

$\text{inside}(8, 13) = -32 - 117 + 107 \geq 0 \ \&\& \ -40 + 65 + 20 \geq 0 \ \&\& \ 72 + 52 - 62 \geq 0$

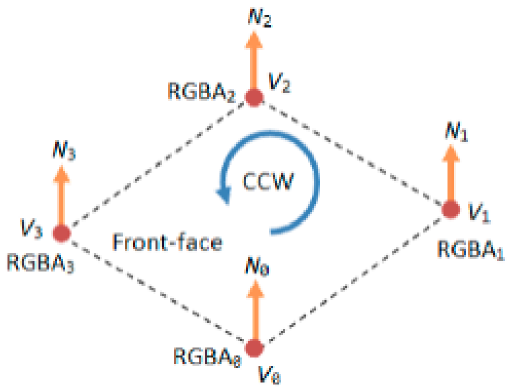
$\text{inside}(8, 13) = -42 \geq 0 \ \&\& \ 45 \geq 0 \ \&\& \ 62 \geq 0$

inside(8, 13) = False (fora)

Ordem dos Pontos

Perceba que a ordem dos pontos é importante, senão você poderá estar pegando semiplanos errados.

Ao se criar um polígono em OpenGL, a ordem padrão para se conectar os vértices é no sentido anti-horário. Isso é conhecido como a "winding order".



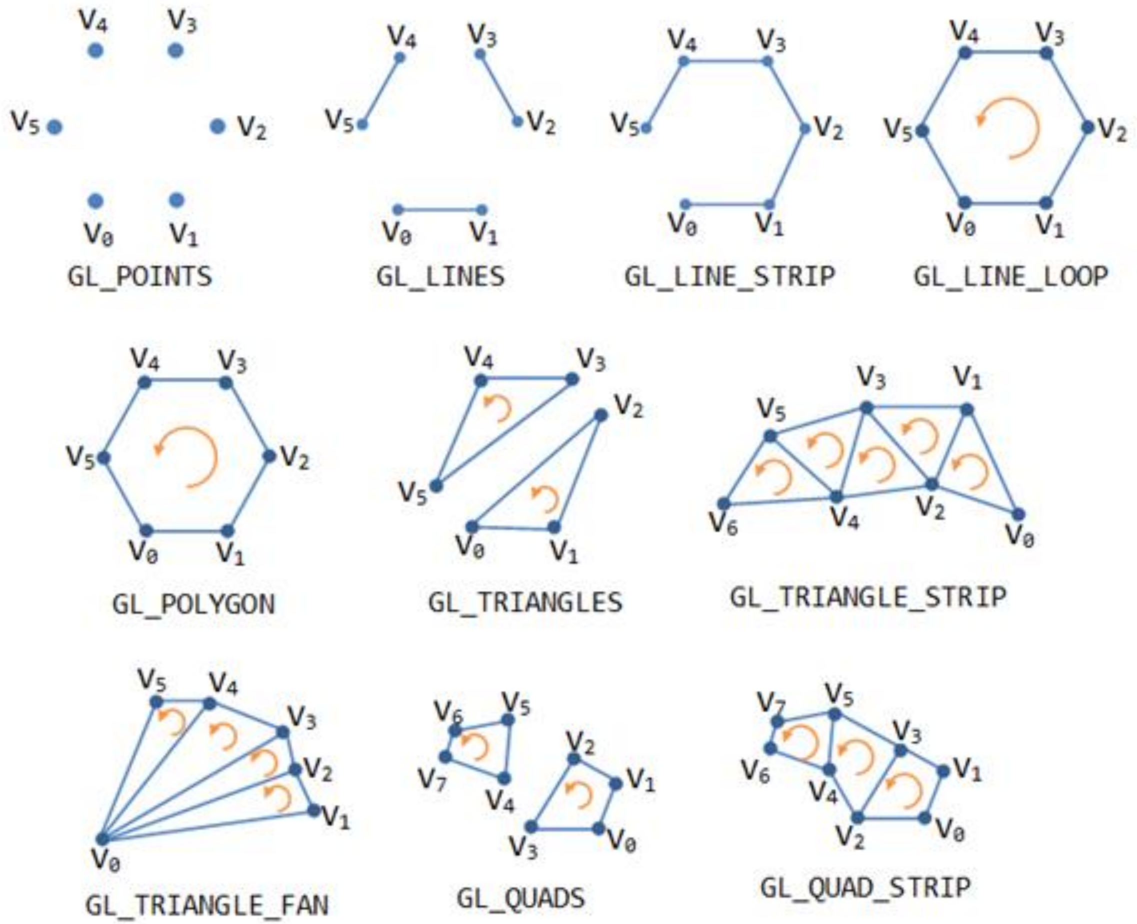
A estratégia de ordem pode ser alterada invocando a função:

void [glFrontFace](GLenum *mode*);

o parâmetro pode ser: GL_CW (horário) ou GL_CCW (anti-horário)

Insper

Primitivas Gráficas em OpenGL

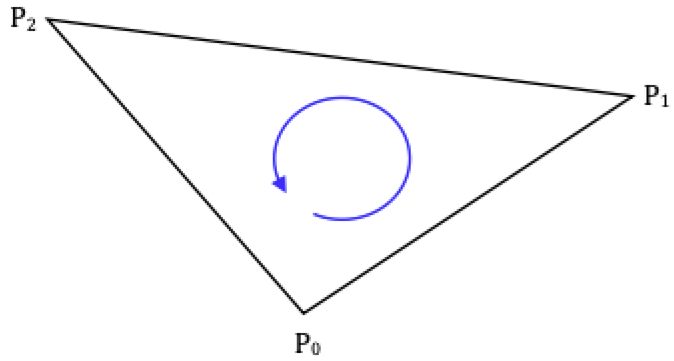


https://www3.ntu.edu.sg/home/ehchua/programming/opengl/cg_introduction.html

Insper

Cuidado

Pessoal, um ponto de atenção sobre as convenções para a ordem dos vértices do triângulo quando queremos decidir se um ponto está dentro ou fora desse triângulo. Convencionamos adotar sempre o sentido anti-horário, como ilustrado na figura abaixo.

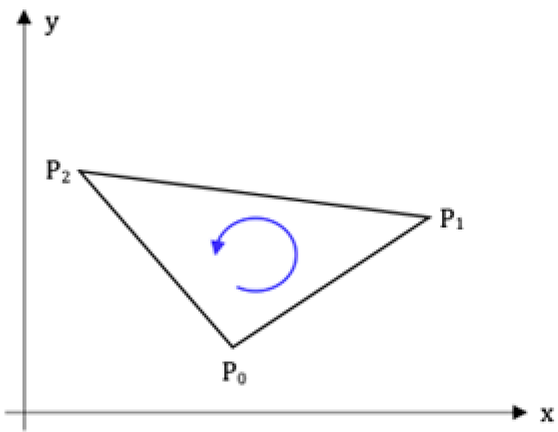


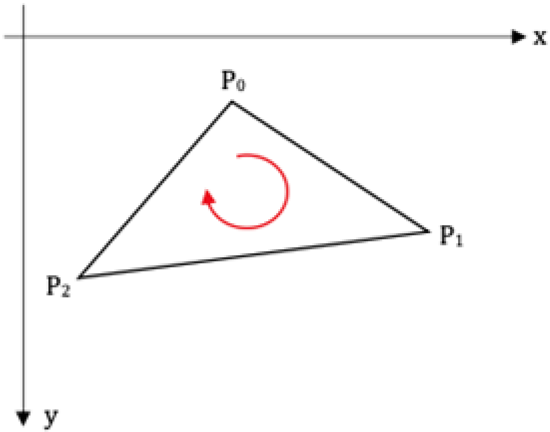
Com isso, podemos afirmar que um ponto pertence ao interior do triângulo quando os valores numéricos das três expressões Li(x, y) são negativos. Chegamos a essa conclusão adotando a orientação convencional do plano cartesiano, ou seja, o eixo x para a direita e o eixo y para cima.

Insper

Invertendo

No exercício e também no projeto a ser entregue, usamos o sistema de coordenadas usual do sistema de pixels, ou seja, com o eixo x orientado para a direita, mas com o eixo y orientado para baixo. Observe o que acontece com o mesmo triângulo representado nesses dois sistemas.

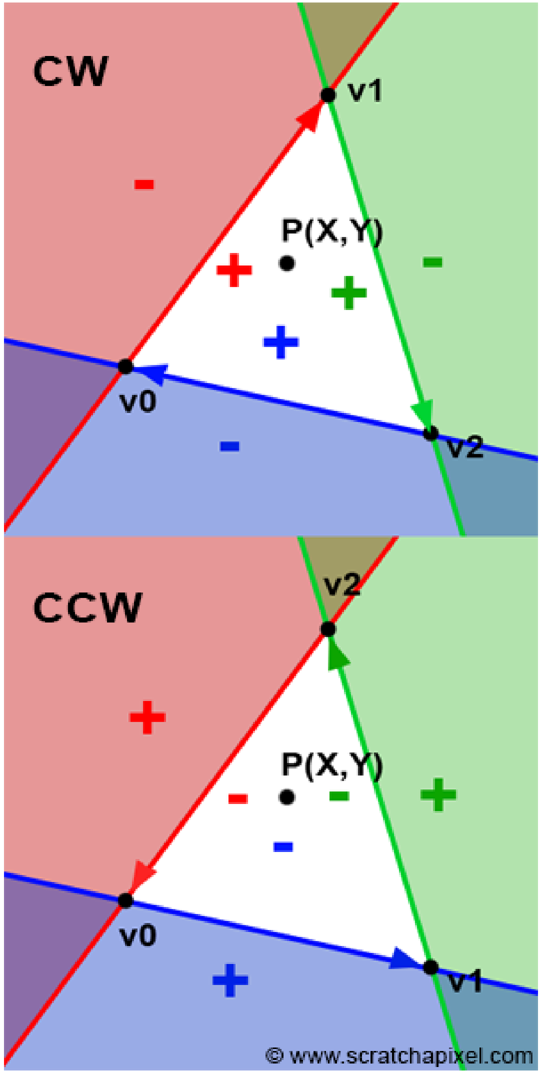




Isso mesmo! O sentido do polígono inverte, ou sejam, fica alterado de anti-horários para horário e vice-versa.

E o que fazer?

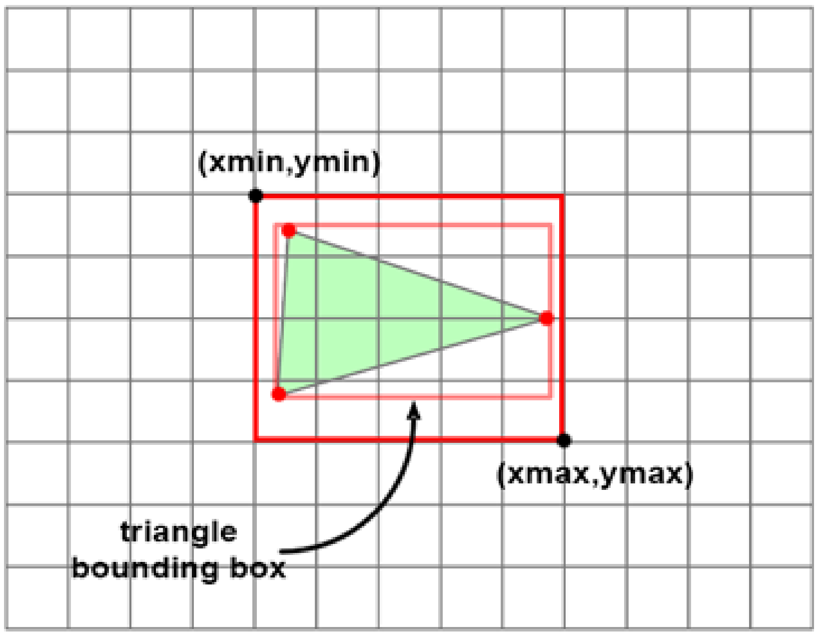
Calma, tudo continua valendo da mesma forma, só que os sinais das três expressões $L_i(x, y)$ ficarão invertidos. Então, usando esse sistema de coordenadas com o eixo y apontando para baixo, podemos afirmar que um ponto pertence ao interior do triângulo quando os valores numéricos das três expressões $L_i(x, y)$ são positivos. Fiquem atentos a essa questão e bom trabalho!



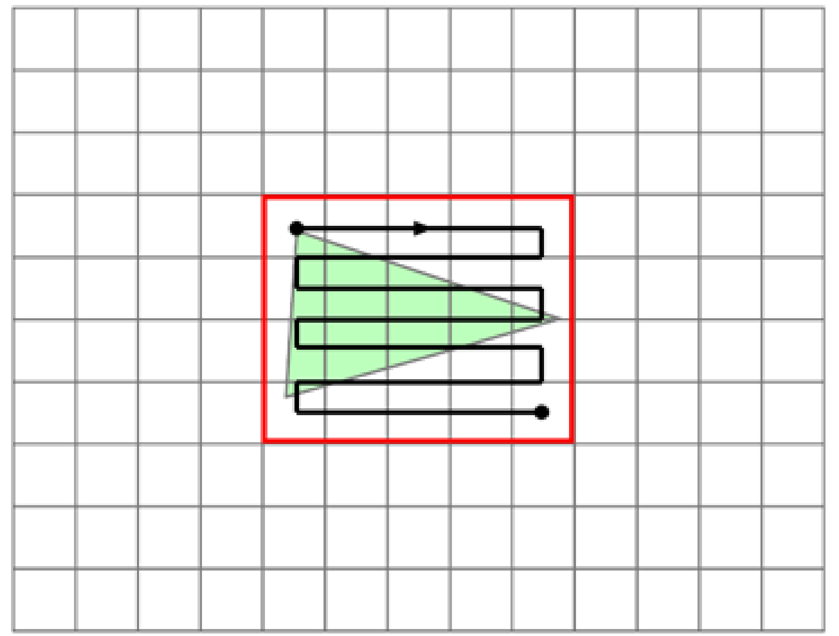
Insper

Otimizações: Bounding Box de Triângulos 2D

Para evitar a iteração em todos os pixels da imagem, podemos iterar em todos os pixels contidos na caixa delimitadora (Bounding Box) do triângulo 2D.



© www.scratchapixel.com



© www.scratchapixel.com

Insper

Traversal de Triângulos

Traversal de triângulos é implementado nas GPUs modernas.
Um artigo descrevendo o funcionamento se encontra em:
http://oa.upm.es/9184/1/INVE_MEM_2010_84947.pdf

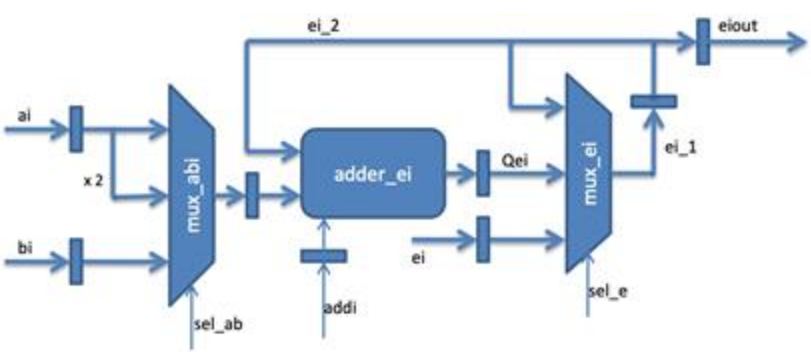


Fig. 6. Full schematic of an e_i adder.

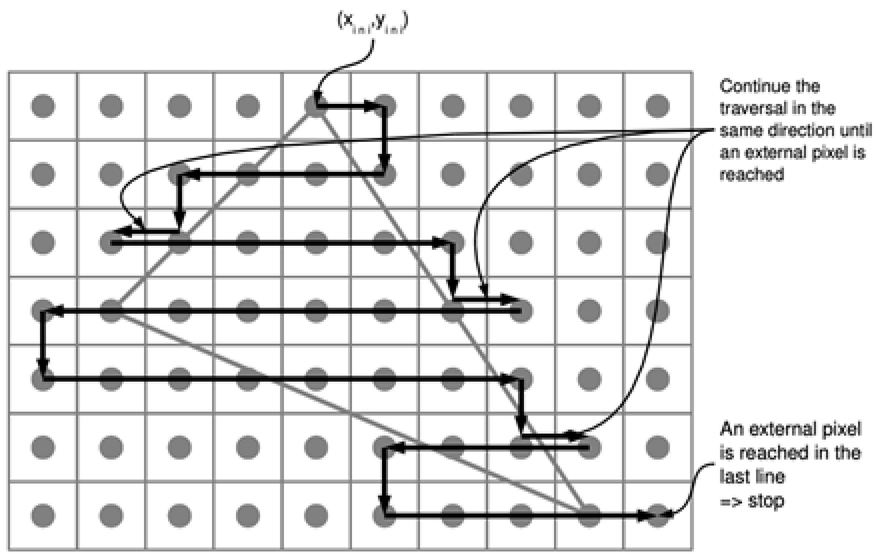


Fig. 7. Zig-zag traversal algorithm.

Insper

Referência recomendada

Home

Donate ♥

Rasterization: a Practical Implementation

https://www.scratchapixel.com/lessons/3d-basic-rendering/rasterization-practical-implementation/overview-rasterization-algorithm.html

Insper

Projeto 1 : Primeira Parte

Fazer um renderizador:

1 – Capaz de desenhar Pontos

2 – Capaz de desenhar Linhas

3 – Capaz de desenhar Triângulos

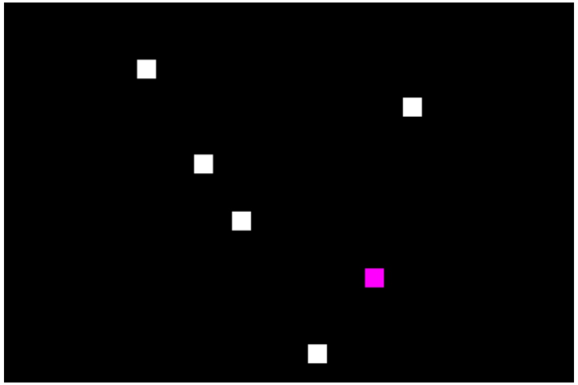
Data de Entrega:

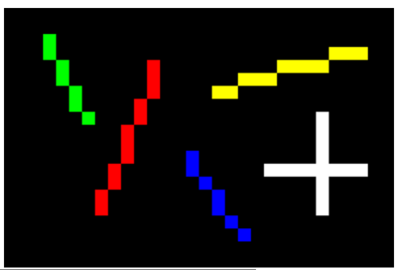
19/8/2025 às 23:59, via Blackboard (https://insper.blackboard.com/)

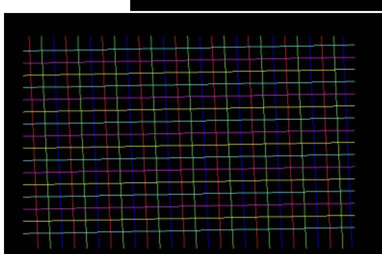
Detalhes:

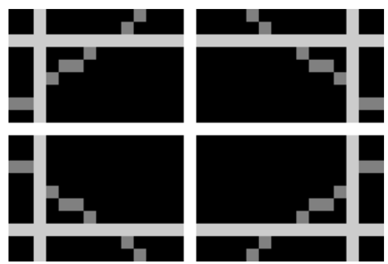
Página da Disciplina (https://lpsoares.github.io/ComputacaoGrafica/)

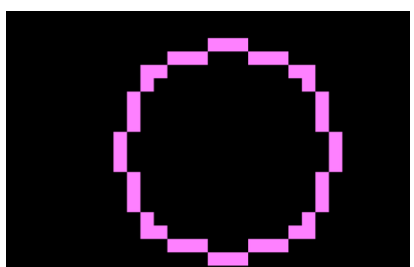
Exemplos

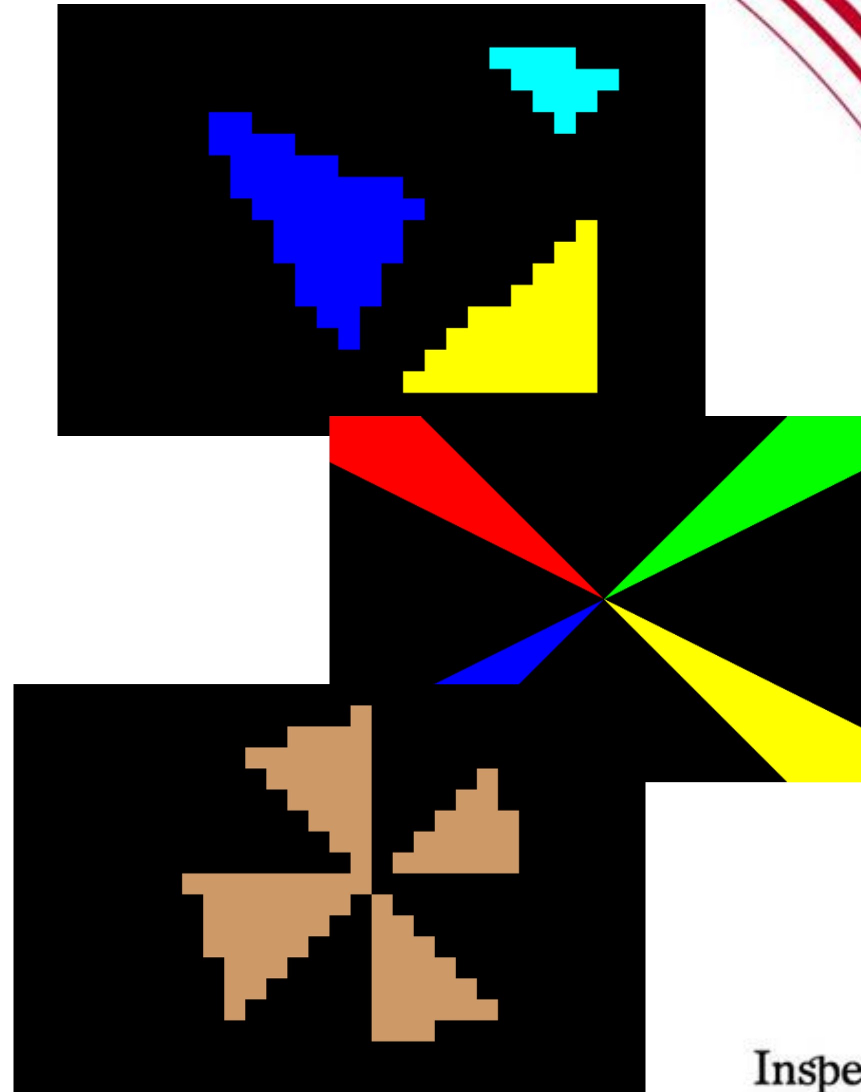






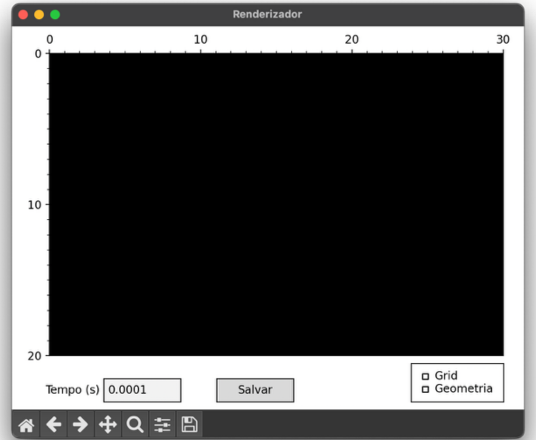


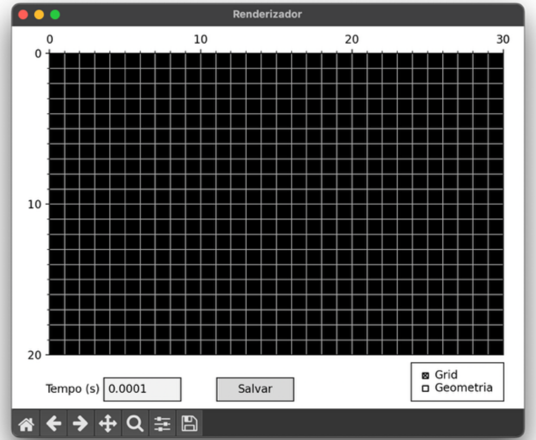


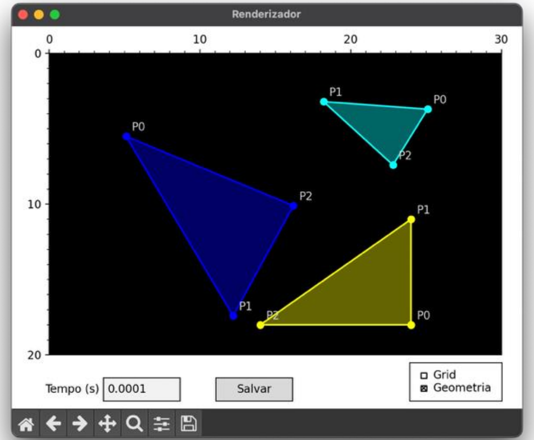


Renderizador

Possível mostrar Grid e Geometria (nessa fase do projeto).





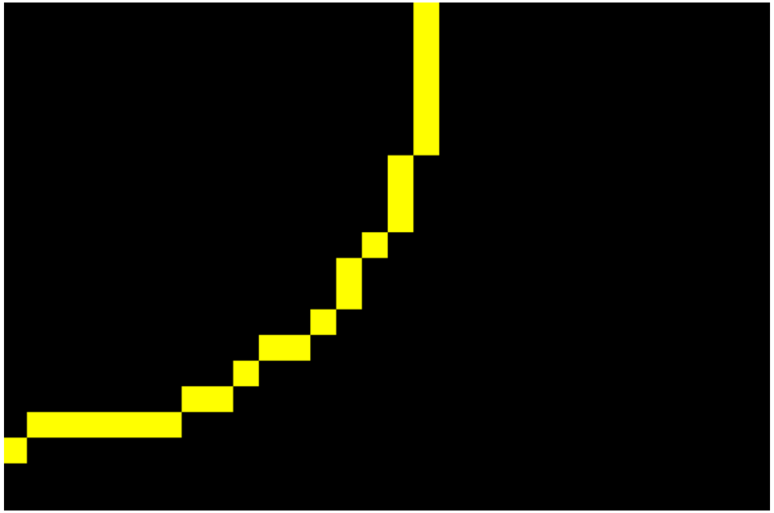


Insper

Extra

Desenhar um círculo (ou pelo menos parte dele).

```
<X3D>
  <Scene>
    <Transform>
      <Shape>
        <Circle2D radius='16'/>
        <Appearance>
          <Material emissiveColor='1 1 0'/>
        </Appearance>
      </Shape>
    </Transform>
  </Scene>
</X3D>
```



Insper

Computação Gráfica

Luciano Soares
<lpsoares@insper.edu.br>

Fabio Orfali
<fabioO1@insper.edu.br>