Computação Gráfica

Aula 15: Curvas e Animações

Kahoot

Entrar em Kahoot.it : https://kahoot.it/

Curvas e Animações

Muitas vezes precisamos de curvas suaves:

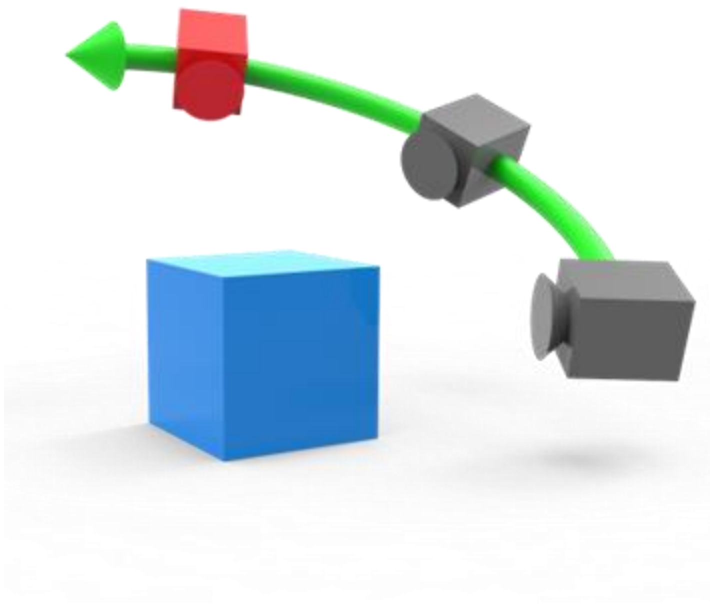
- Caminhos de câmera
- Fontes de texto vetoriais
- CAD e outras modelagem de objetos

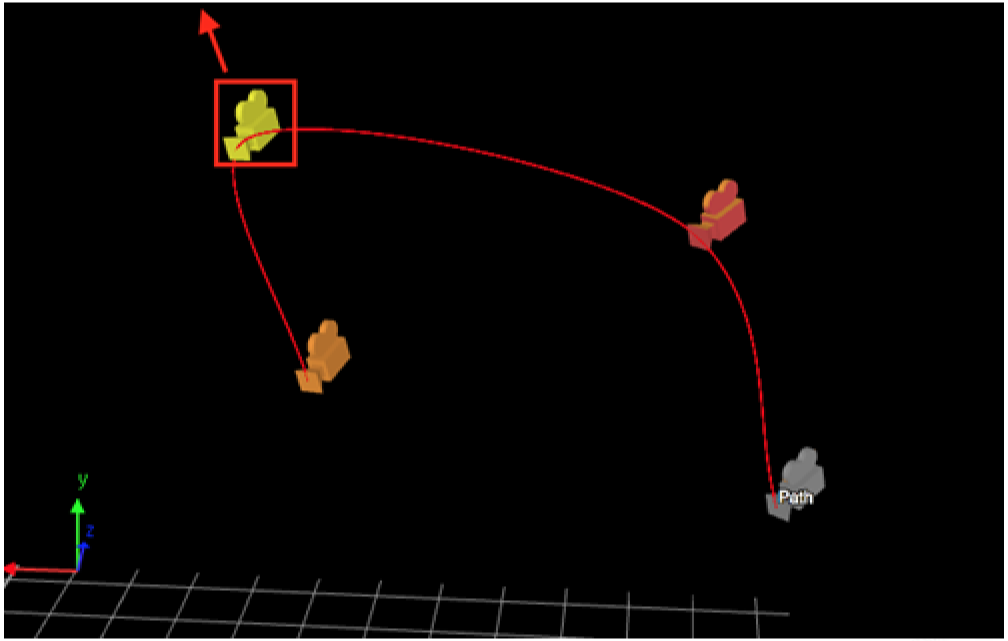
Caminhos de Câmeras

LUMION 10 AMAZING WALKTHROUGH OF AEROSPACE MUSEUM
https://www.youtube.com/watch?v=KYteLM6ViBA

Caminhos de Câmeras

Definir pontos de controle e ir interpolando entre as posições desejadas (em geral posição e rotação).

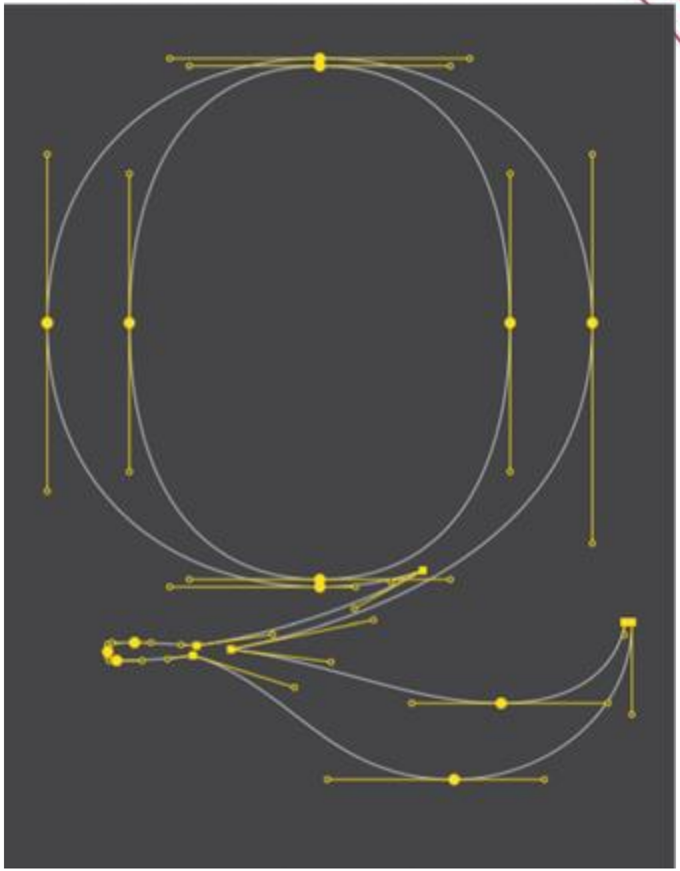




Fontes de Texto Vetoriais

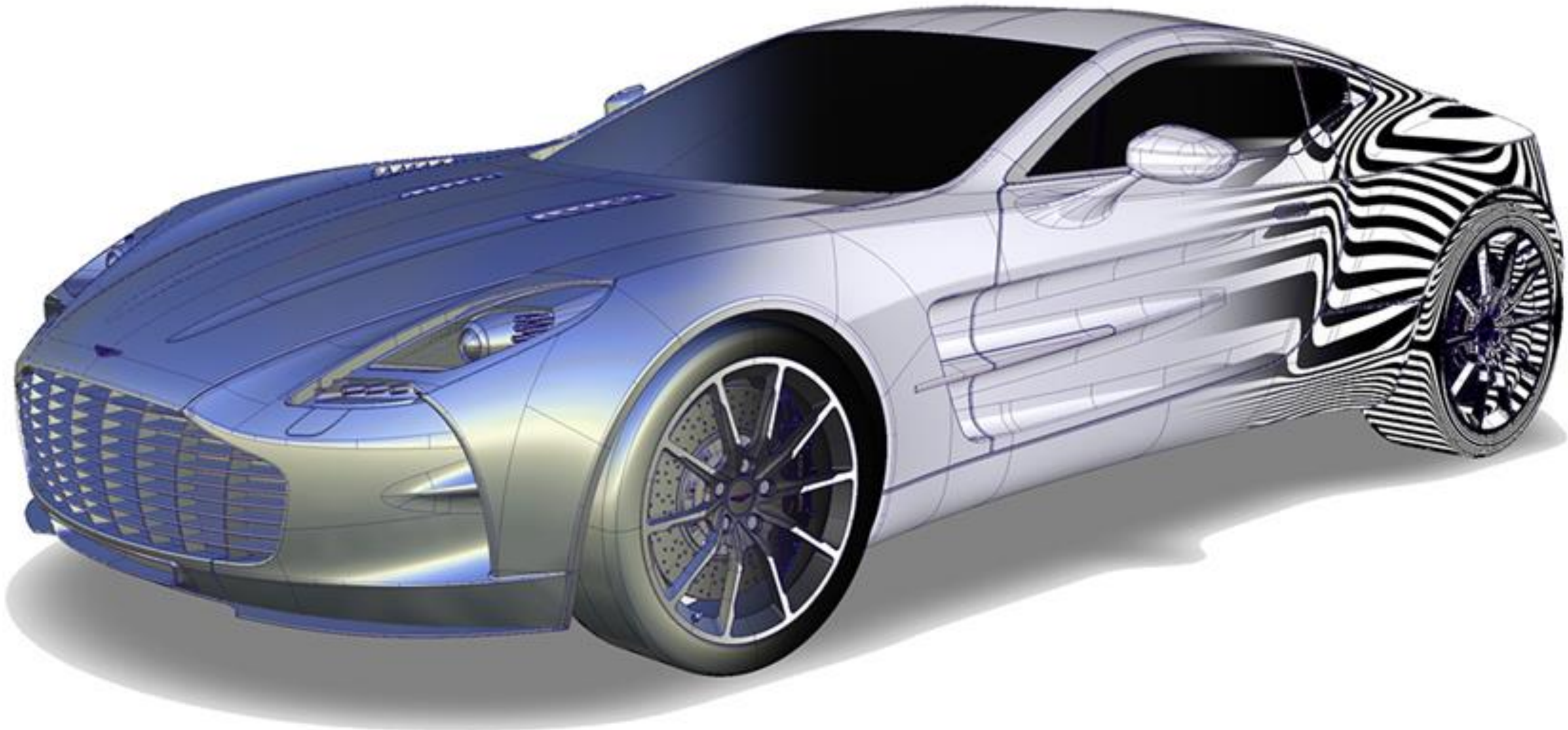
The Quick
Brown Fox
Jumps Over
The Lazy Dog

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz 0123456789



Fonte Baskerville – representada com Splines Cúbicas de Bézier

Design : CAD



Aston Martin One - 77 Surfacing - Alias, por Ankishu Gupta

Caminhos de Câmeras

As curvas envolvidas nesses caminhos devem ser **suaves**, como mostrado nos exemplos.

Mas o que significa ser suave do ponto de vista matemático?

Vamos relembrar!

Caminhos de Câmeras

O caminho da bolinha é uma curva suave? Por que?

Caminhos de Câmeras

NÃO!

A trajetória não é **contínua**.

Dizemos que uma função f é contínua em um ponto x = a quando:

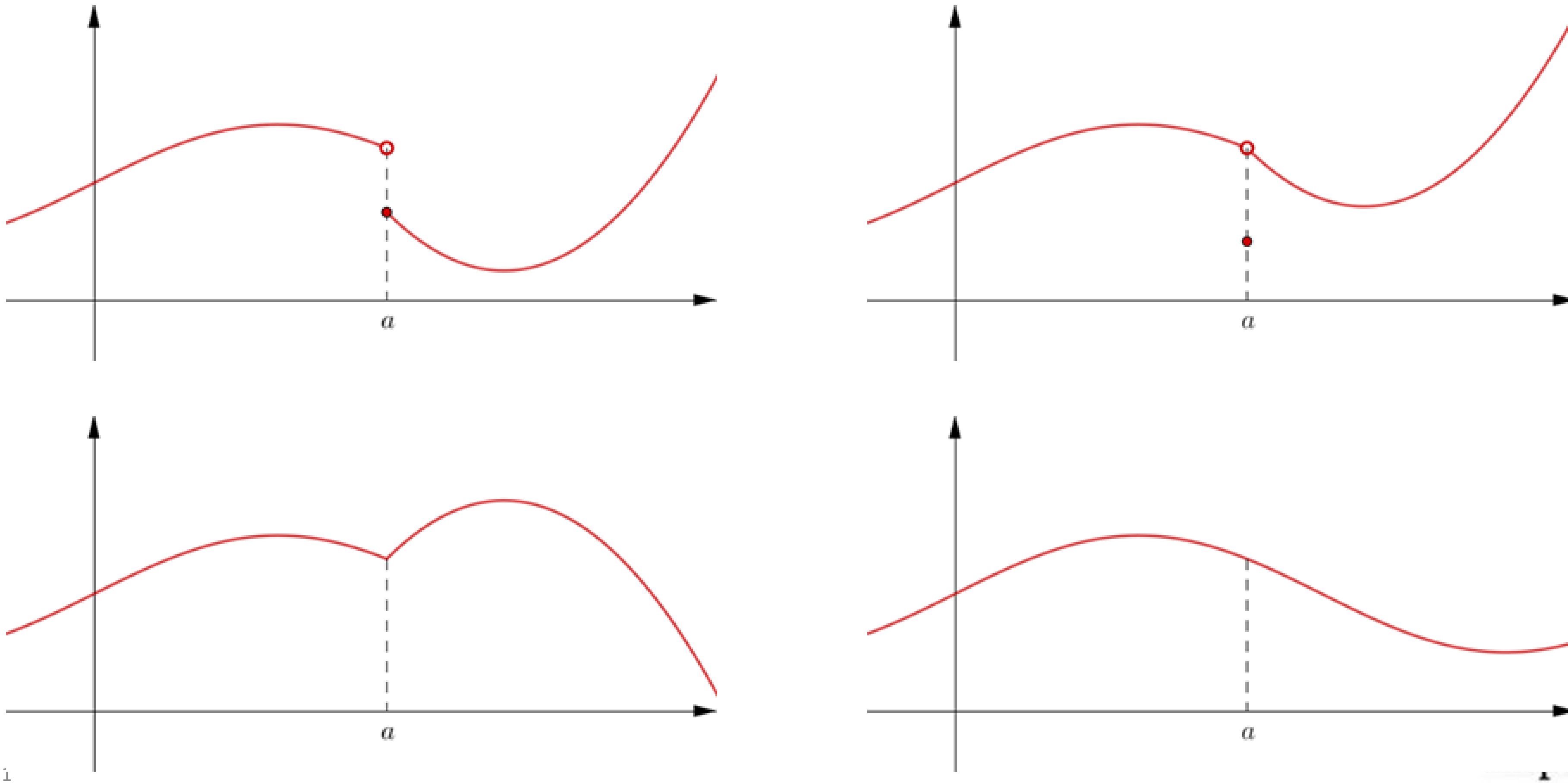
1) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

2) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Insper

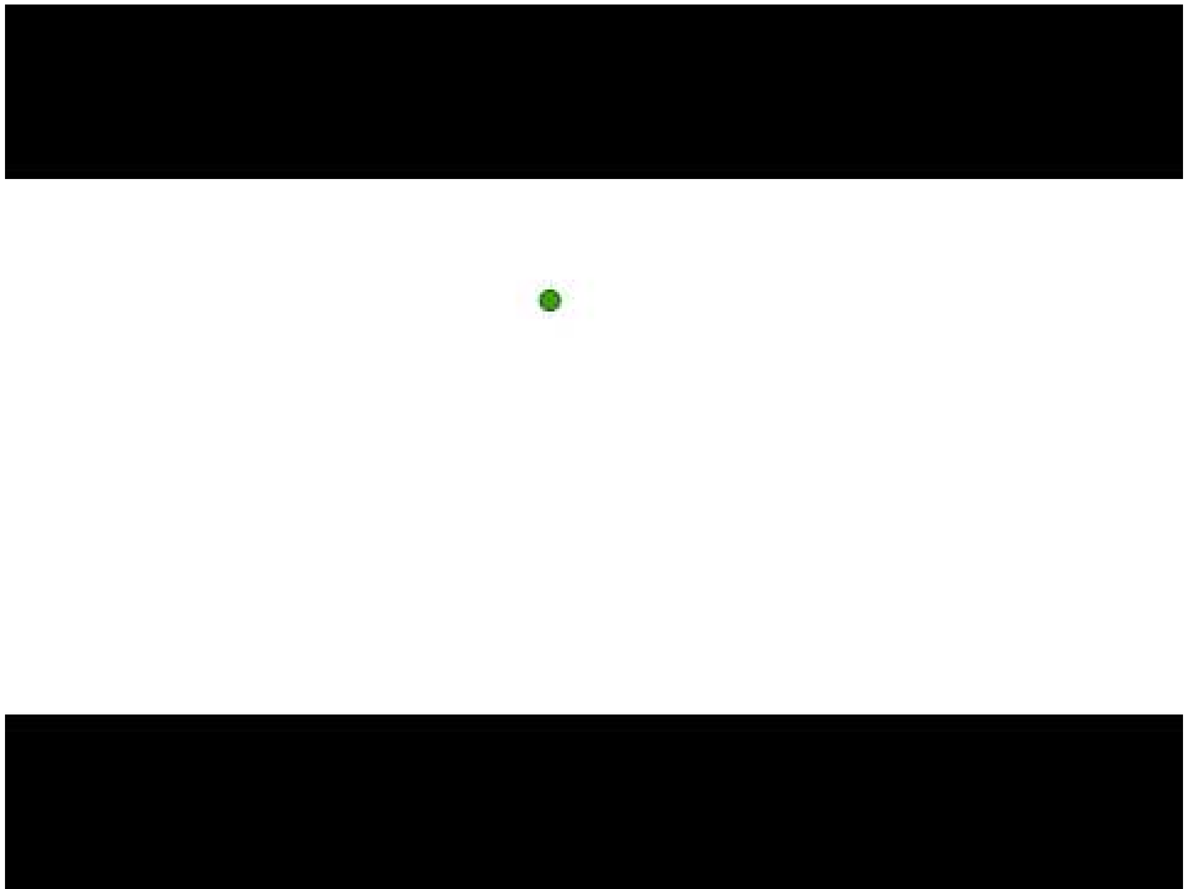
Caminhos de Câmeras

Quais das figuras representam o gráfico de uma função contínua em x = a?



Caminhos de Câmeras

E esse caminho? É uma curva suave? Por que?



NÃO!

A trajetória não é **derivável**.

Dizemos que uma função f é derivável em um ponto x = a quando o limite abaixo existe e resulta em um número finito:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Caminhos de Câmeras

Uma forma equivalente de verificar se uma função é derivável no ponto x = a:

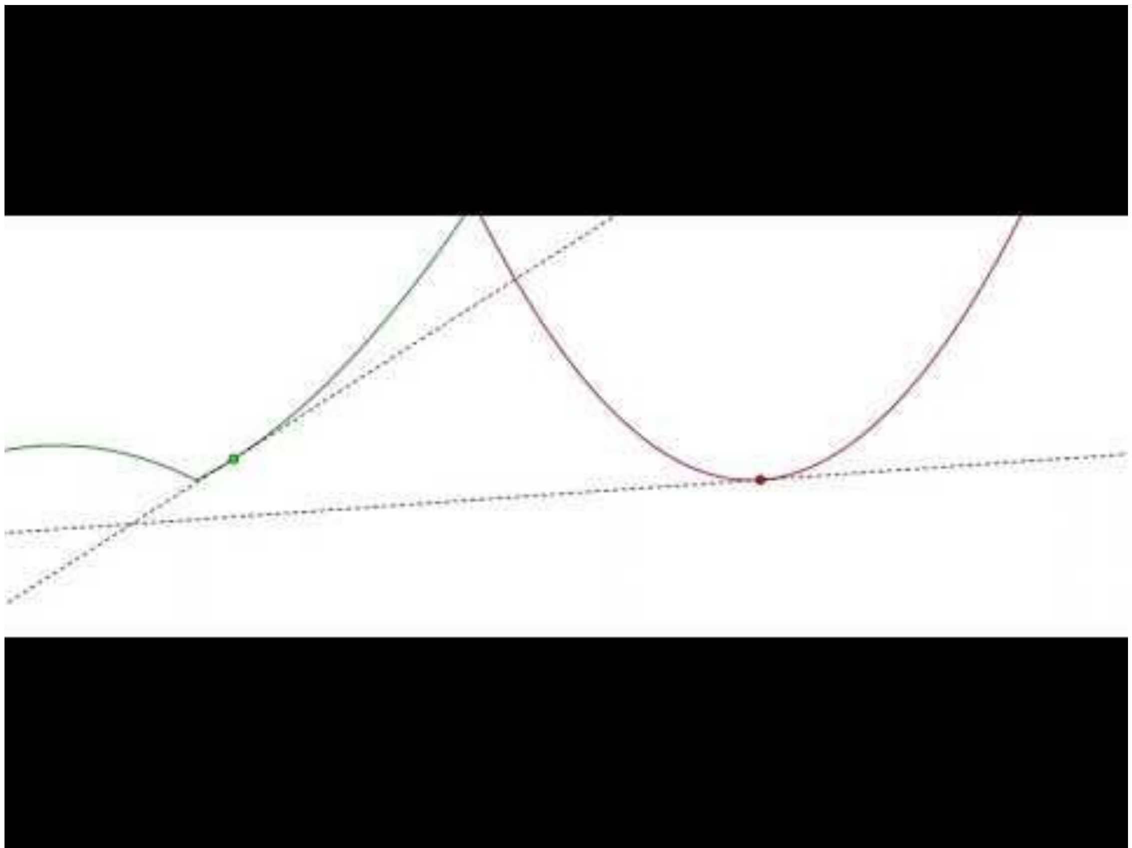
1) f é contínua em x = a.

2) Os limites laterais da derivada em x = a são iguais.

$$\lim_{x \to a^-} f'(x) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$$

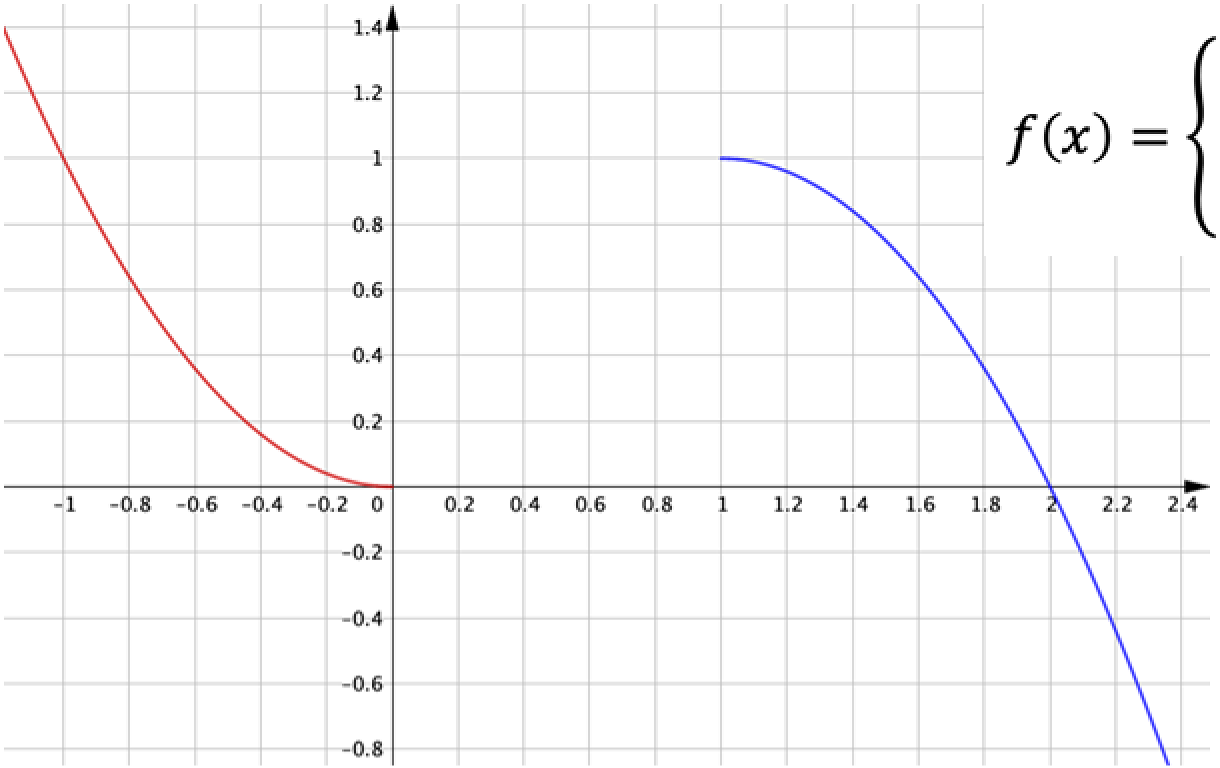
Caminhos de Câmeras

Em outras palavras, a reta tangente à curva não deve mudar bruscamente nas proximidades do ponto x = a.



Exercício

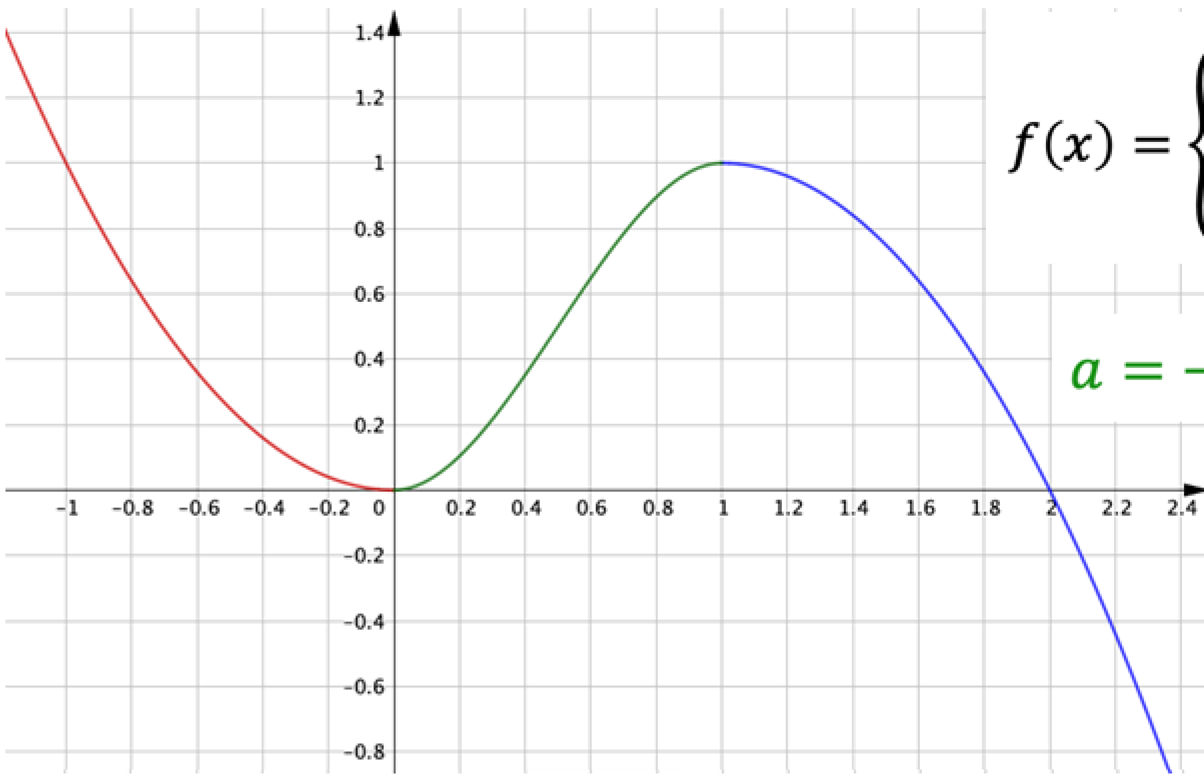
Defina uma função polinomial p(x) no intervalo [0,1] capaz de unir as duas curvas a seguir de forma suave.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 - (x-1)^2 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Exercício

Defina uma função polinomial p(x) no intervalo [0,1] capaz de unir as duas curvas a seguir de forma suave.

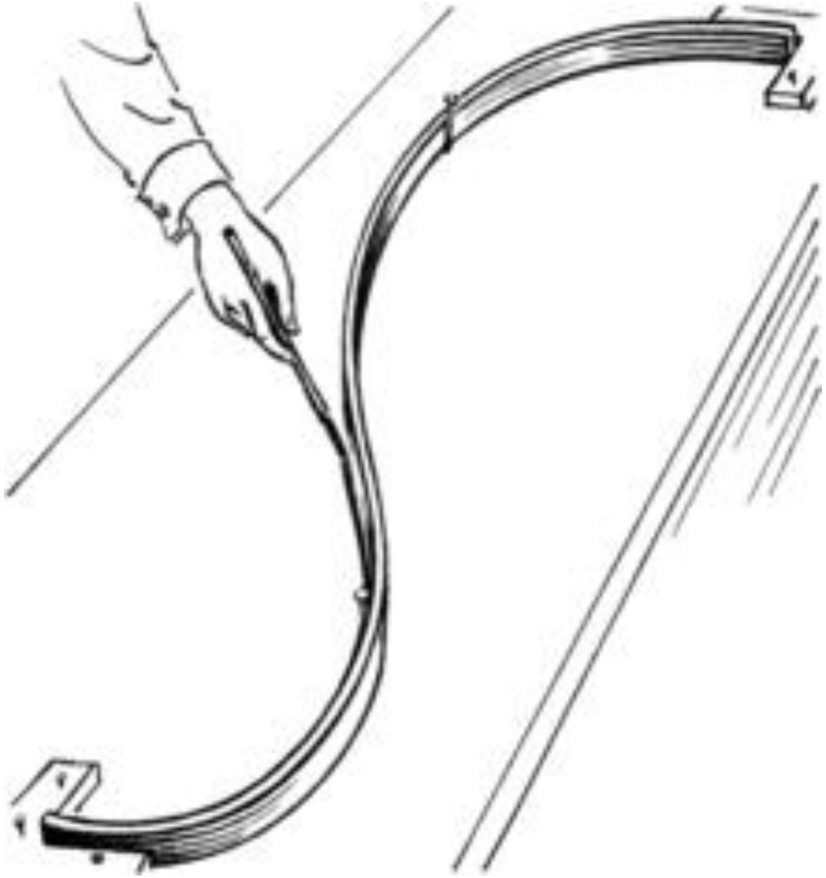


$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 - (x-1)^2 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

$a = -2, b = 3, c = 0$ e $d = 0$

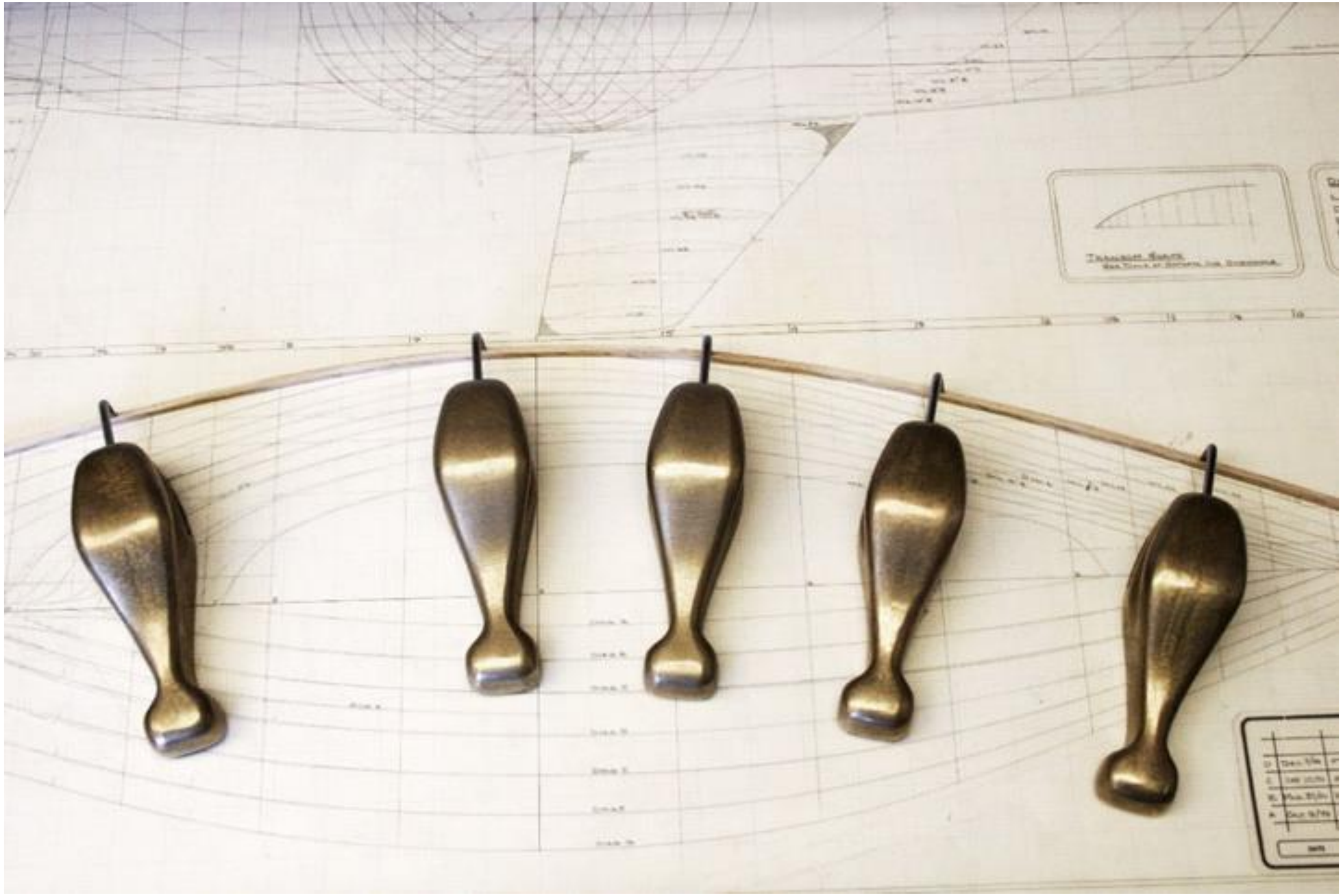
$$p(x) = -2x^3 + 3x^2$$

Splines



https://en.wiktionary.org/wiki/spline

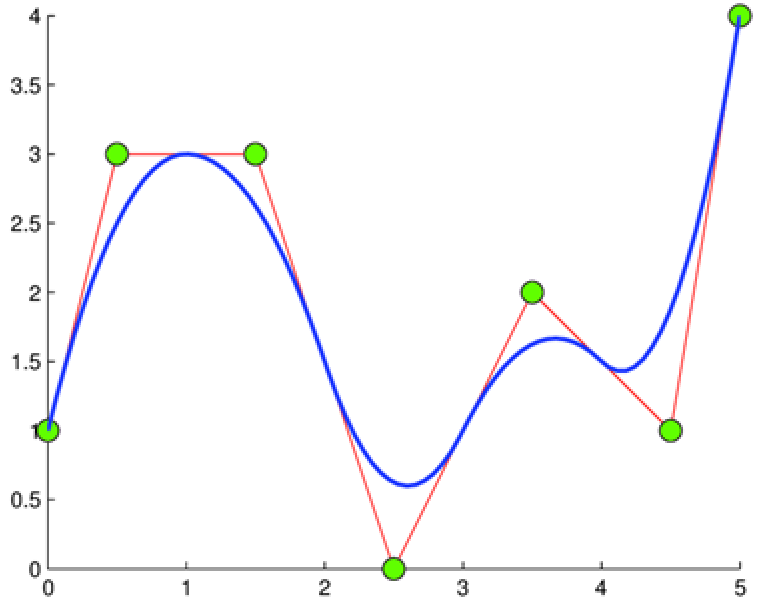
Spline de um verdadeiro desenhista



http://www.alatown.com/spline-history-architecture/

Splines

Uma spline é uma representação matemática para uma curva polinomial suave definida, por partes, através de uma sequência de pontos (chamados de pontos de controle).

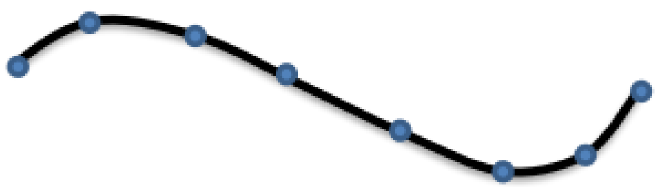


A quadratic ($p = 2$) B-spline curve with a uniform open knot vector $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5\}$

Fonte da imagem: thai Hoang, Chien. (2015). DEVELOPMENT OF ISOGEOMETRIC FINITE ELEMENT METHODS. 10.13140/RG.2.1.3861.2647.

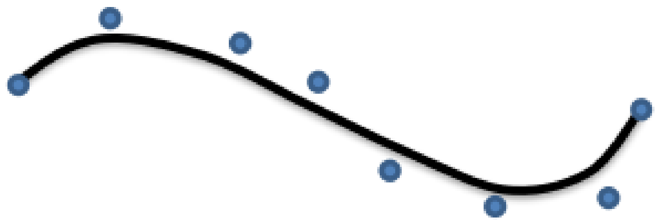
Tópicos sobre Splines

Interpolação
- Interpolação Cúbica de Hermite
- Interpolação Catmull-Rom



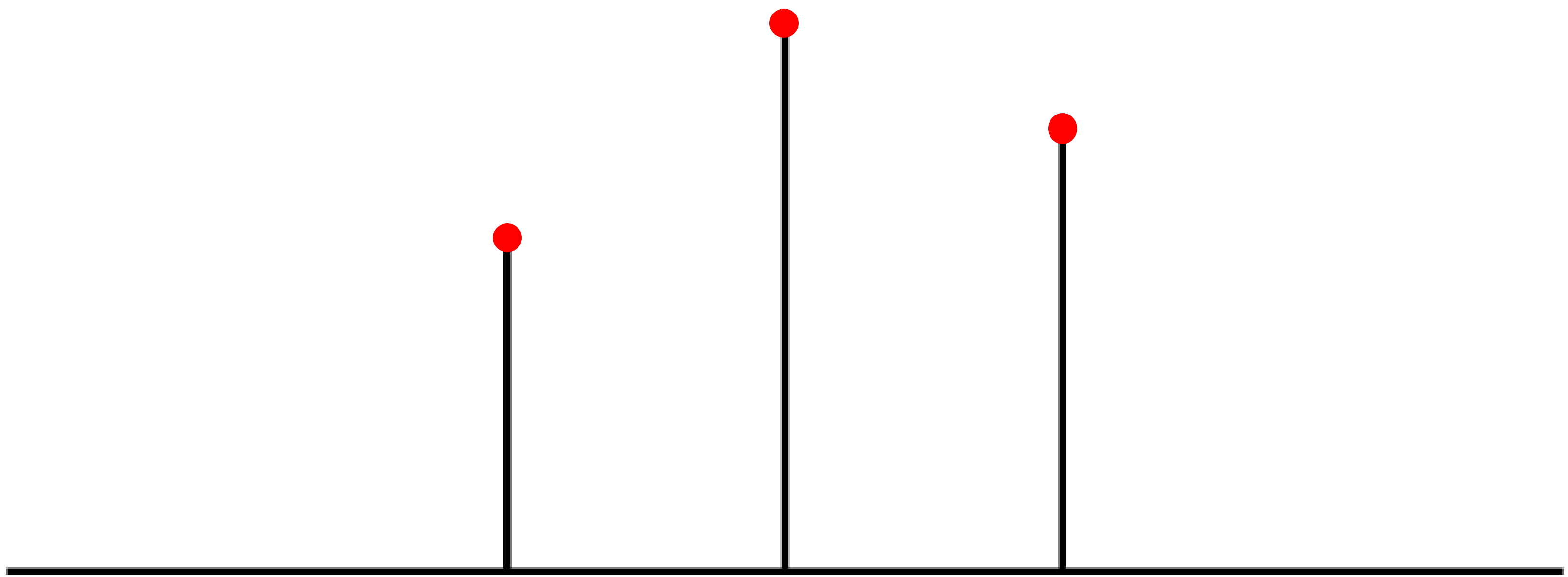
Na interpolação, a curva passa sobre todos os pontos definidos.

Aproximação
- Bezier (não veremos hoje)
- B-Spline (não veremos hoje)



Na aproximação, a curva começa sobre o ponto inicial e termina sobre o final. Os demais pontos são aproximados.

Objetivo Interpolar Valores

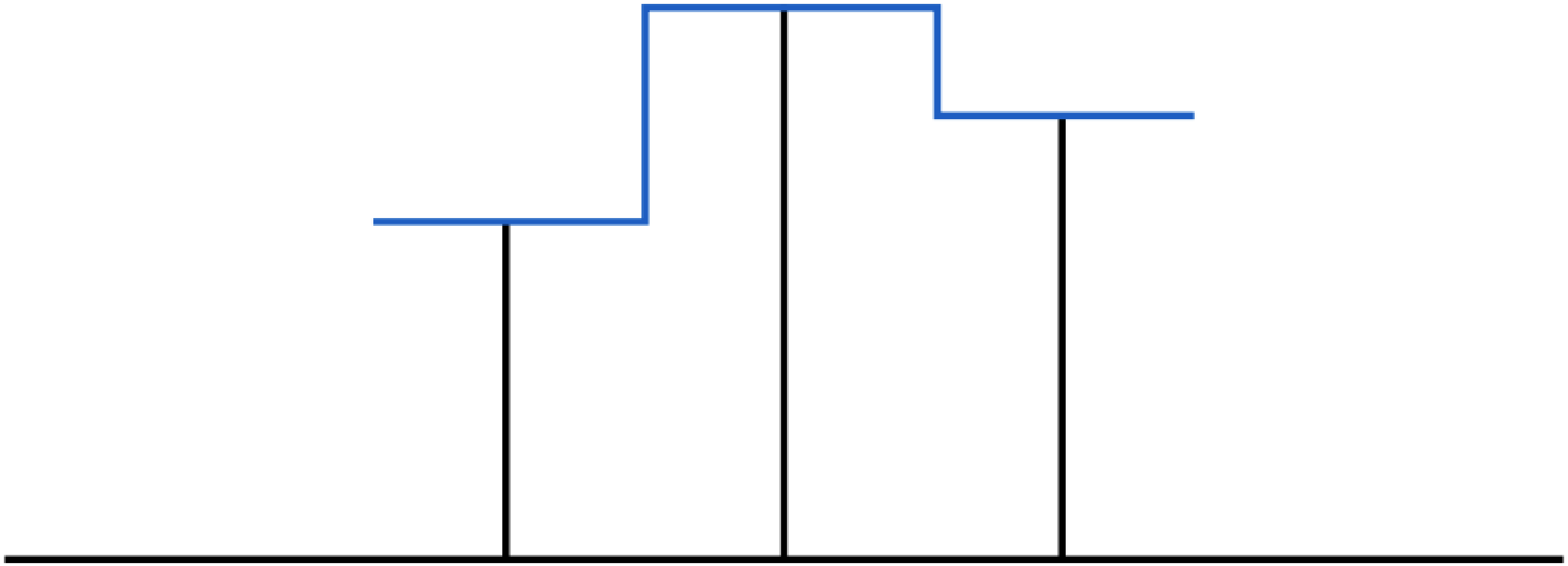


valores pontuais de uma função qualquer, como interpolar?

Insper

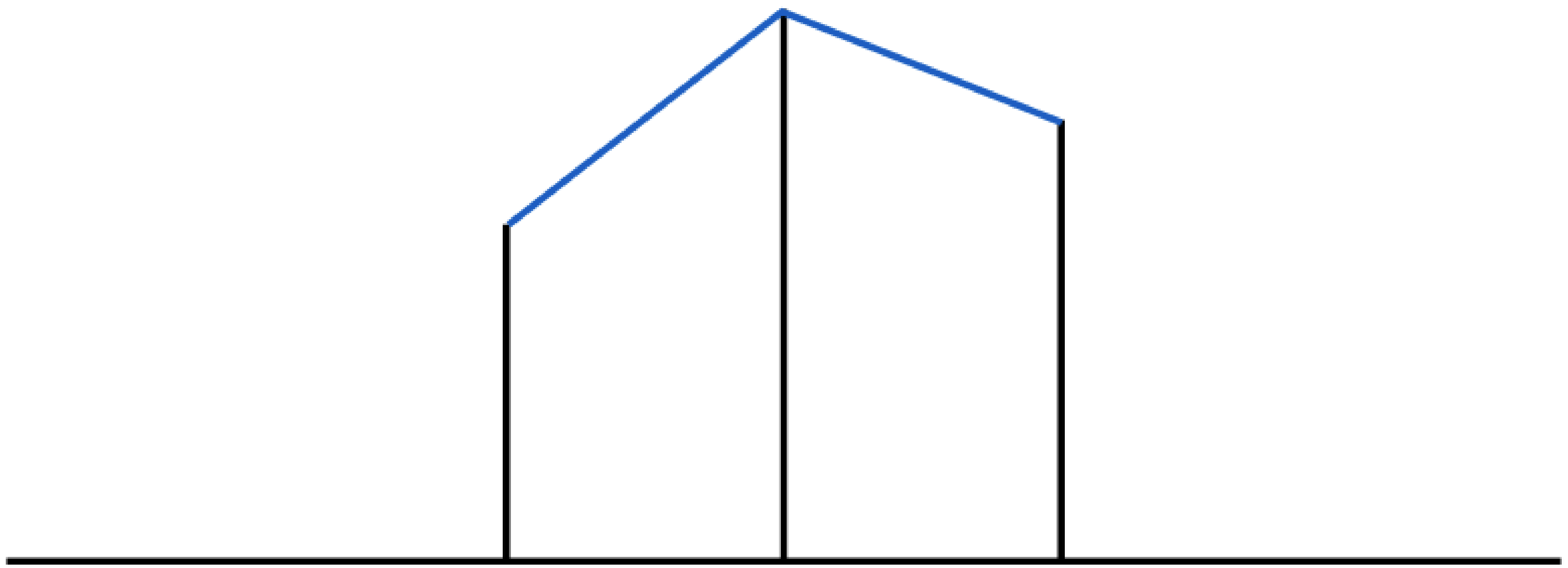
Interpolação do vizinho mais próximo

Problema: valores não são contínuos



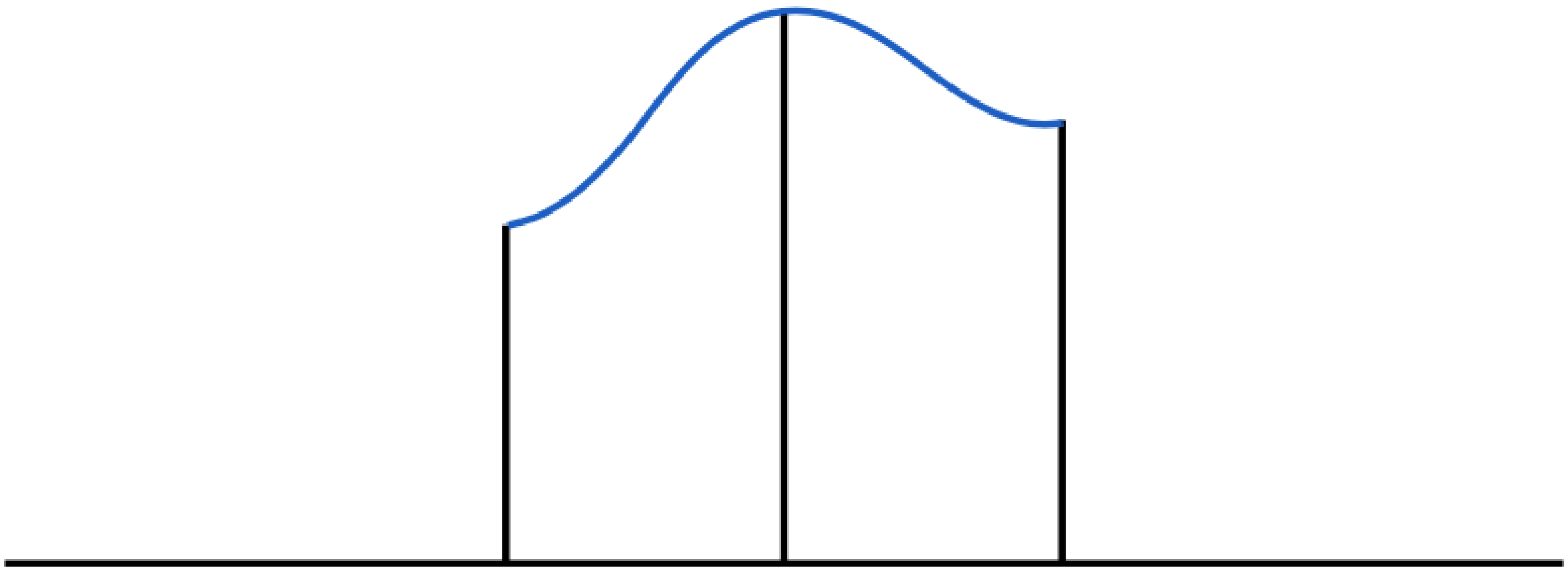
Interpolação Linear

Problema: derivações não contínuas



Insper

Interpolação Suave ?

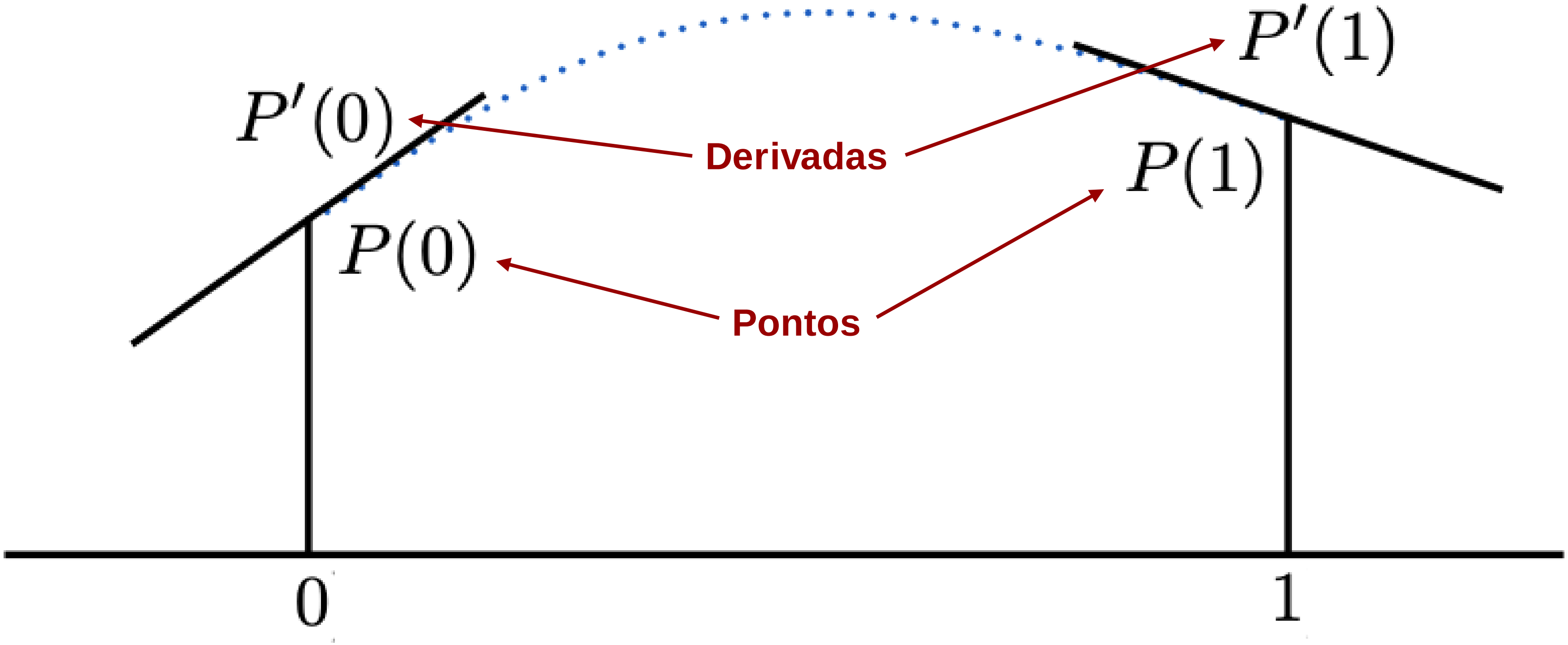


Interpolação Cúbica de Hermite

Charles Hermite cerca de 1887

Insper

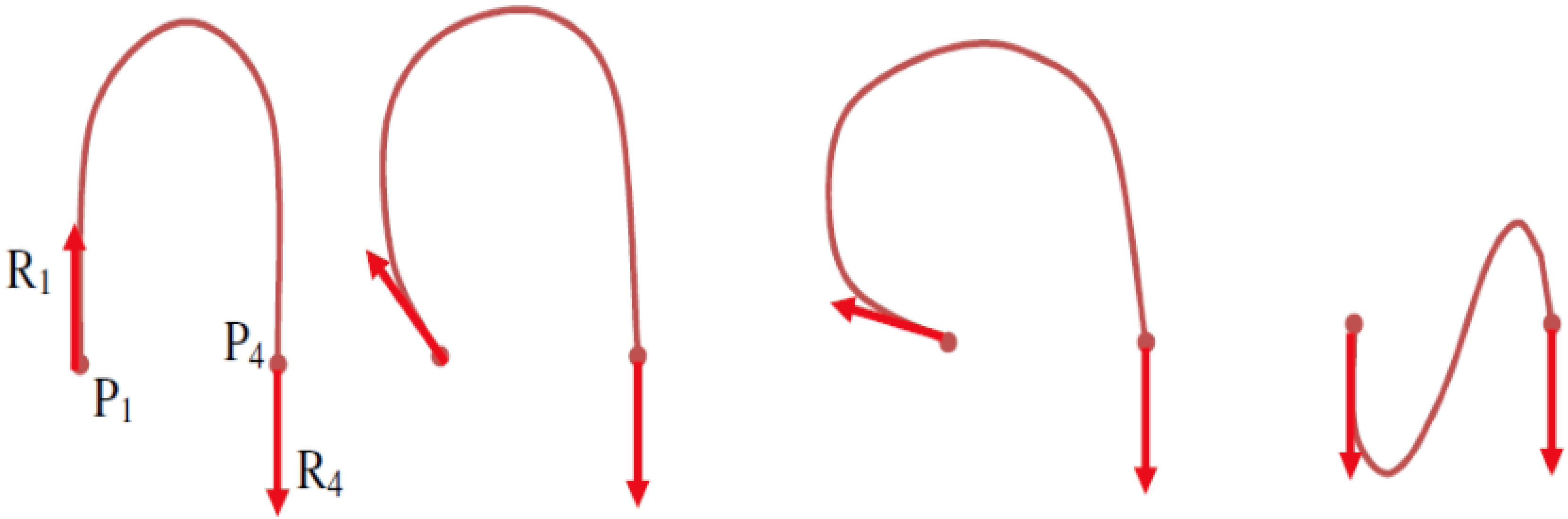
Interpolação Cúbica de Hermite



Entradas: valores e derivadas nos pontos de controle

Curvas de Hermite

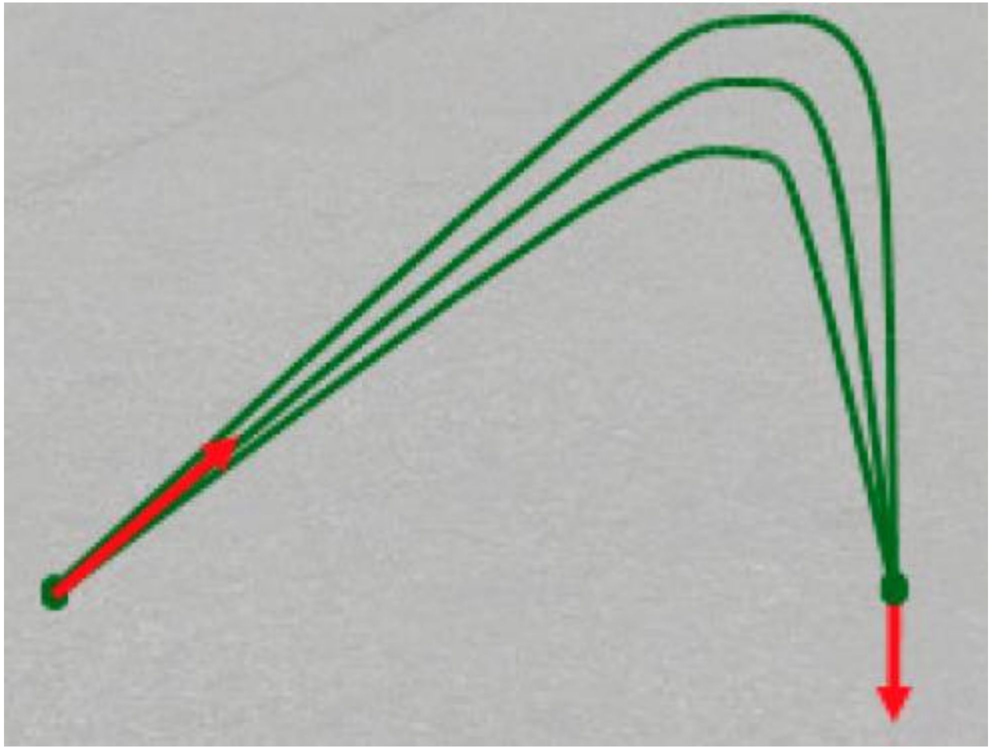
Curvas com os mesmos pontos iniciais e finais, apenas alterando a direção da tangente



fonte: http://computacaografica.ic.uff.br/conteudocap3.html

Curvas de Hermite

Curvas com os mesmos pontos iniciais e finais, apenas alterando a intensidade da tangente



fonte: http://computacaografica.ic.uff.br/conteudocap3.html

Interpolação Polinomial Cúbica

Polinômio Cúbico

$$P(t) = a\, t^3 + b\, t^2 + c\, t + d$$

Por que cúbico?

4 restrições de entrada : 4 graus de liberdade

$$P(0) = h_0$$
$$P(1) = h_1$$
$$P'(0) = h_2$$
$$P'(1) = h_3$$

Perceba que vamos trabalhar na faixa do 0 a 1.

Interpolação Polinomial Cúbica

Polinômio Cúbico

$$P(t) = a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + d$$

Derivando

$$P'(t) = 3a\,t^2 + 2b\,t + c$$

Configurando equações de restrição

$$P(0) = h_0 = d$$

$$P(1) = h_1 = a + b + c + d$$

$$P'(0) = h_2 = c$$

$$P'(1) = h_3 = 3a + 2b + c$$

Resolvendo os coeficientes polinomiais

$$h_0 = d$$

$$h_1 = a + b + c + d$$

$$h_2 = c$$

$$h_3 = 3a + 2b + c$$

$$\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Mas o que precisamos é o contrário disso. Como fazer?

Resolvendo os coeficientes polinomiais

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

(podem verificar se essas matrizes são inversas)

Forma Matricial para Função de Hermite

$$P(t) = a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + d$$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

Interpretação 1

Linhas da Matriz = Coeficientes da Fórmula

$$P(t) = a\, t^3 + b\, t^2 + c\, t + d$$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

Insper

Interpretação 2

Colunas da Matriz = ?

$$P(t) = a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + d$$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ -2t^3 + 3t^2 \\ t^3 - 2t^2 + t \\ t^3 - t^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

Base da Função de Hermite

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0(t) & H_1(t) & H_2(t) & H_3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$t^3$$
$$t^2$$
$$t$$
$$1$$

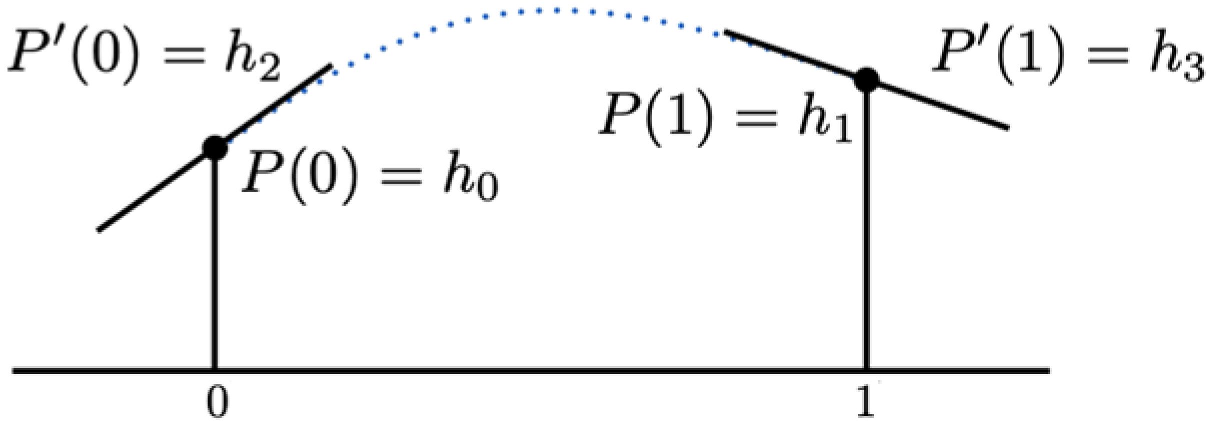
Termos polinomiais

$$H_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$
$$H_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$
$$H_2(t) = t^3 - 2t^2 + t$$
$$H_3(t) = t^3 - t^2$$

Funções de base de Hermite
para polinômios cúbicos

Insper

Recapitulando: Interpolação Cúbica de Hermite



Entradas: valores e derivadas nos pontos de controle

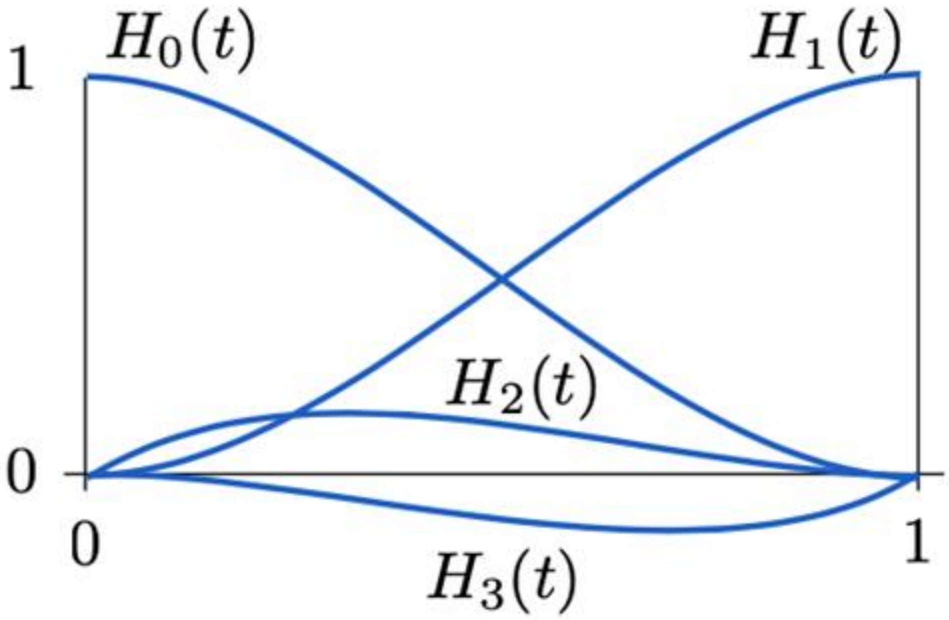
Saída: polinômio cúbico que pode ser interpolado (de 0 a 1)

Solução: soma ponderada das funções interpoladoras de Hermite

$$P(t) = h_0\, H_0(t) + h_1\, H_1(t) + h_2\, H_2(t) + h_3\, H_3(t)$$

Insper

Funções Interpoladoras de Hermite



$$H_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$H_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$H_2(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

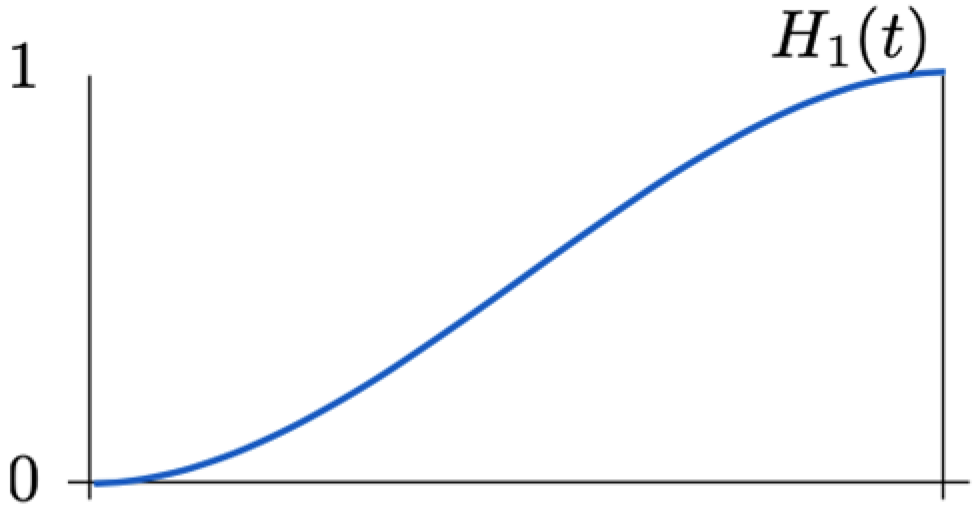
$$H_3(t) = t^3 - t^2$$

Insper

Funções Simples

Uma função muito útil

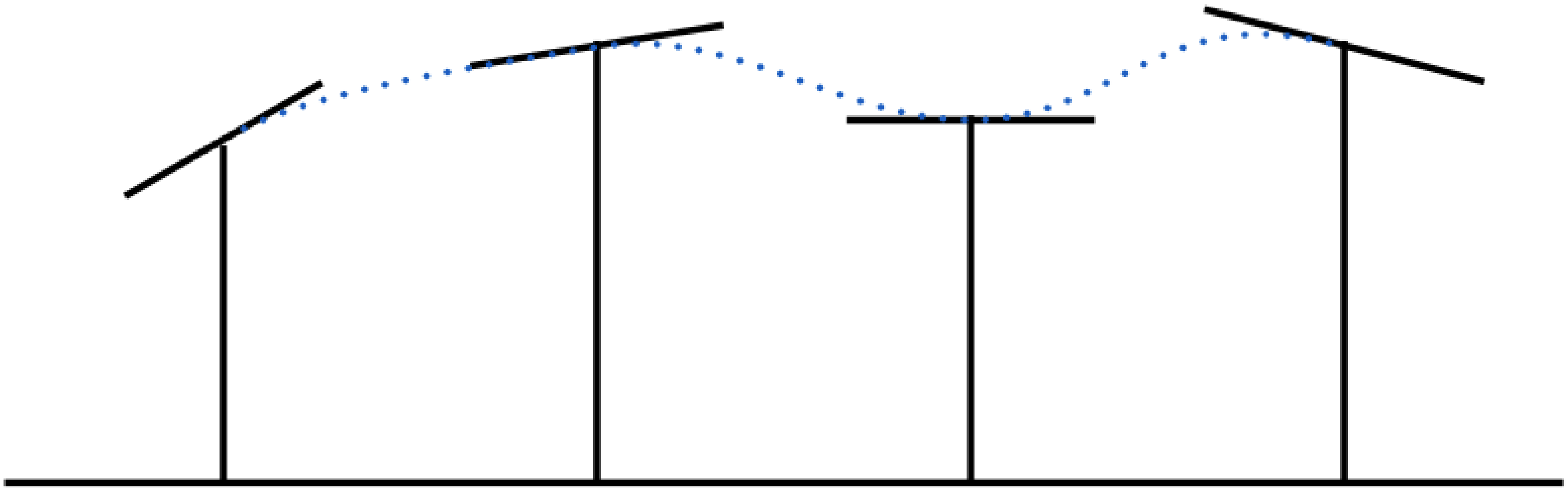
Usada para iniciar e terminar animações (velocidades zero)



$$H_1(t) = -2t^3 + 3t^2 = t^2(3 - 2t)$$

Insper

Interpolação Spline de Hermite



Entradas: sequência de valores e derivadas

Insper

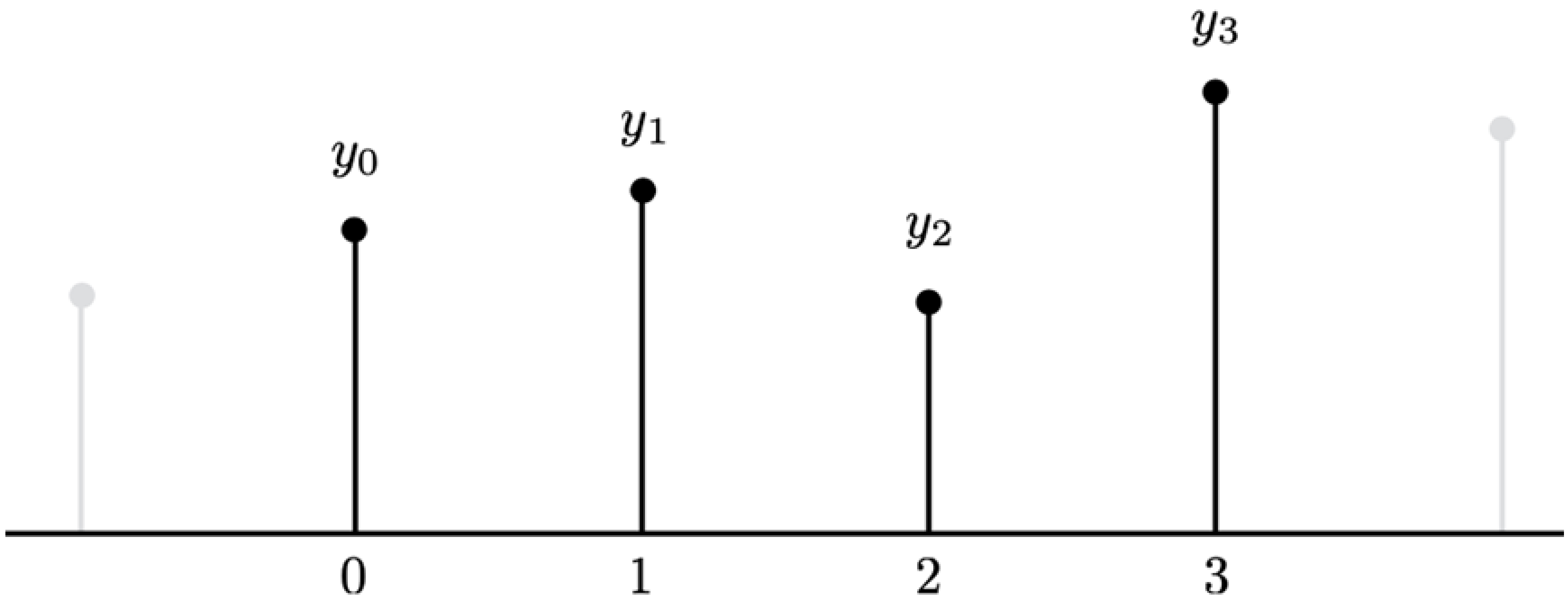
Interpolação Catmull-Rom

Ed Catmull

Raphael Rom

Interpolação Catmull-Rom

Entrada: sequencia de valores

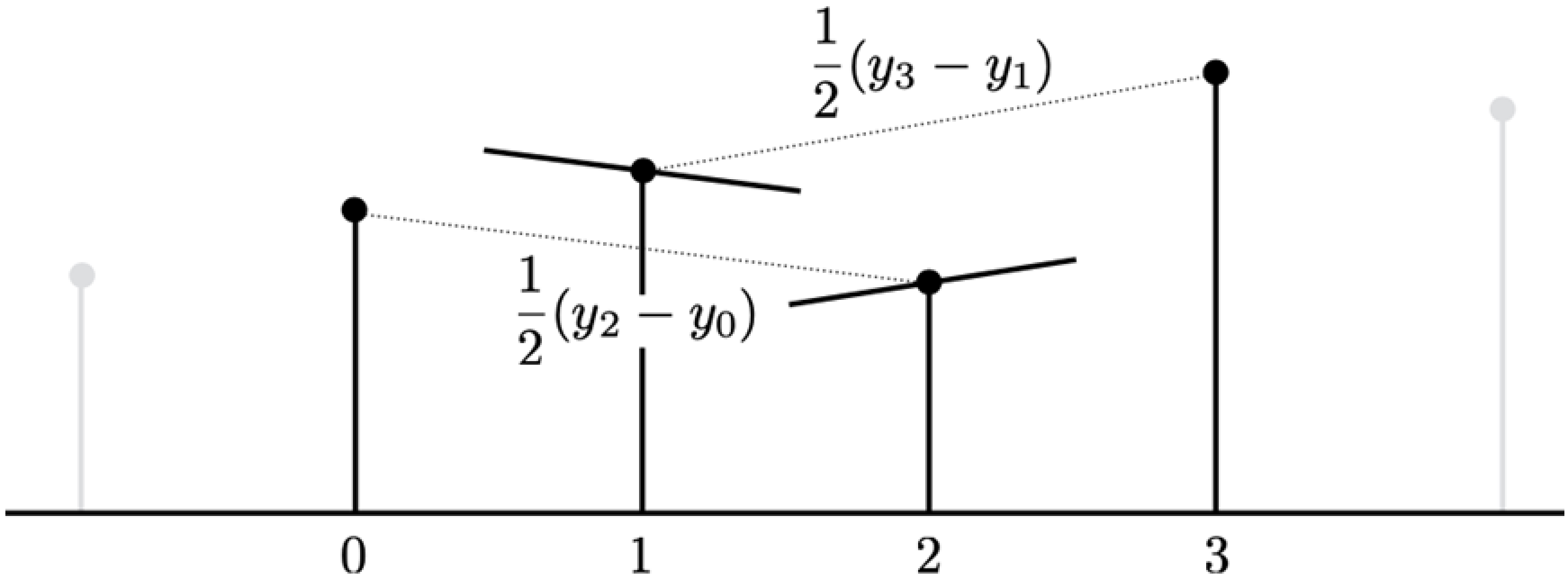


Insper

Interpolação Catmull-Rom

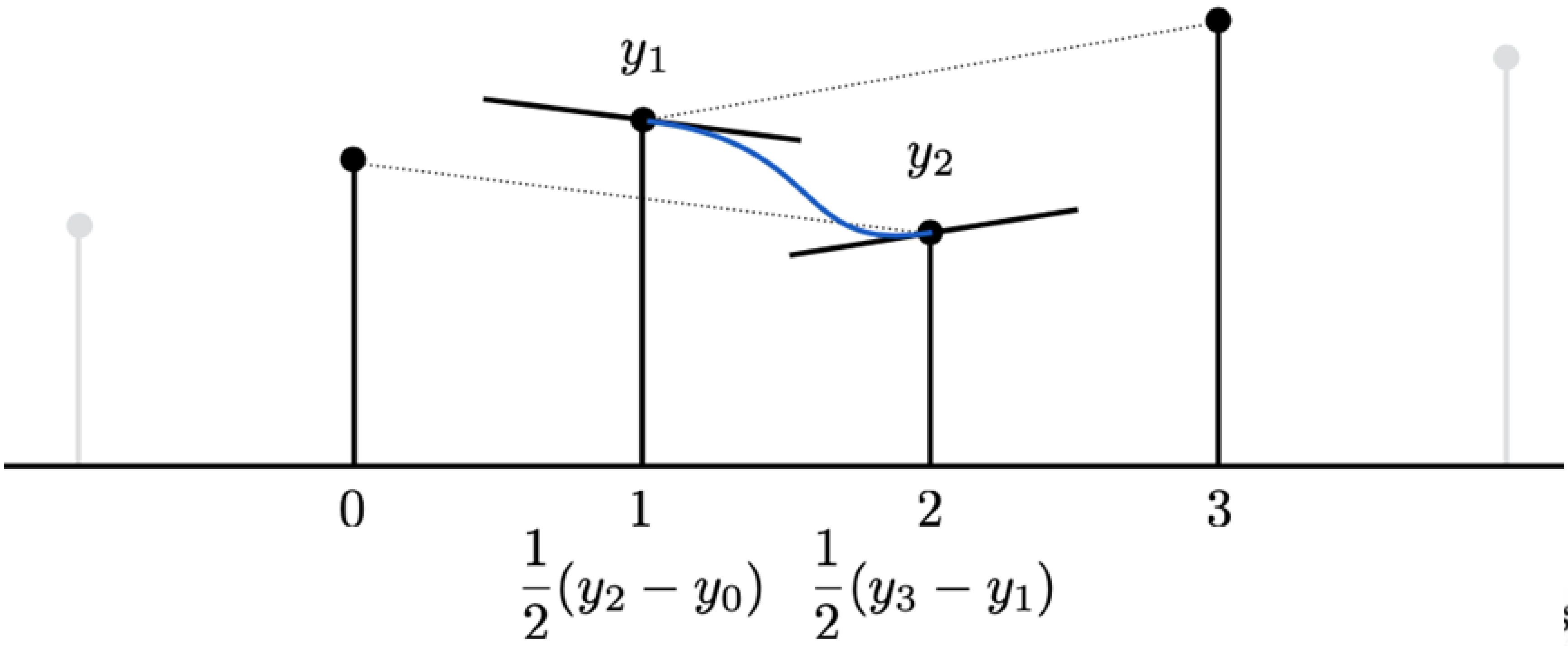
Regra para derivadas:

Combine a inclinação entre os valores anteriores e os próximos



Interpolação Catmull-Rom

Então use a interpolação de Hermite

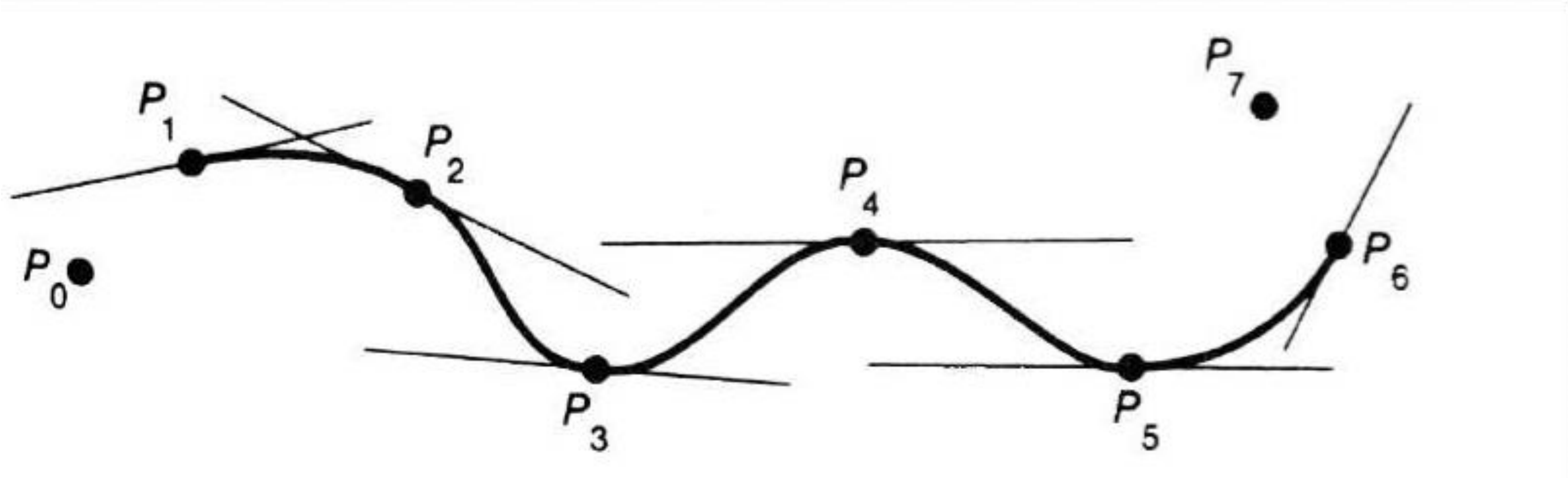


sper

Spline de Catmull-Rom

Entrada: sequencia de pontos

Saída: Spline que interpola todos os pontos com continuidade C1

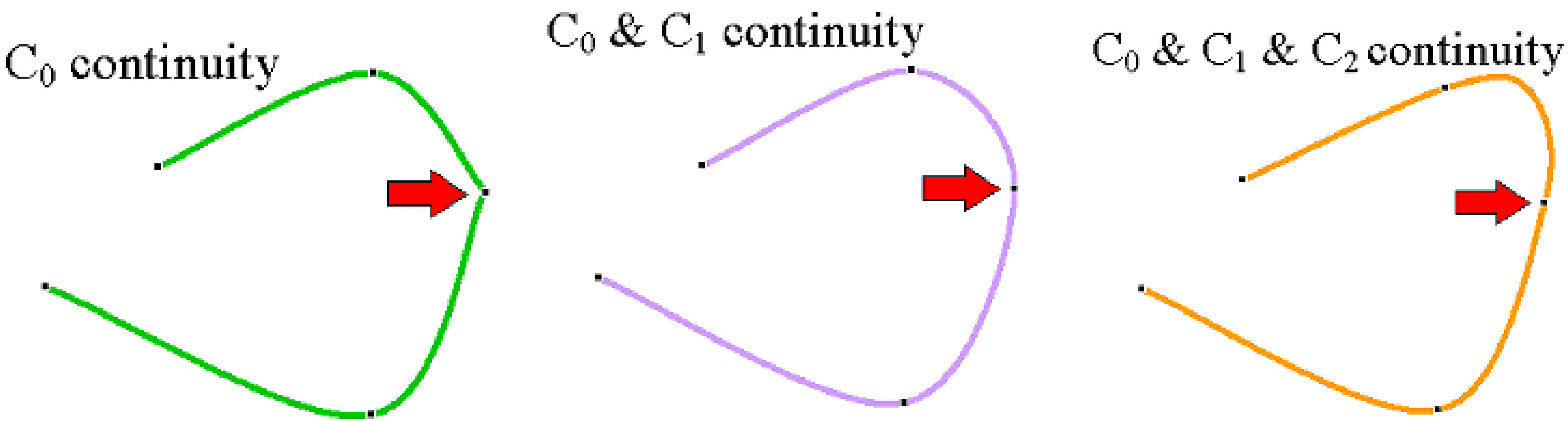


Explicando Continuidade

Continuidade C0: garante que os segmentos de curvas são interligados

Continuidade C1: garante que os segmentos de curvas tenham a mesma inclinação nos seus pontos de junção (mesma direção das tangentes)

Continuidade C2: garante que os segmentos de curvas tenham a mesma curvatura nos pontos de junção (mesma direção e magnitude das tangentes)



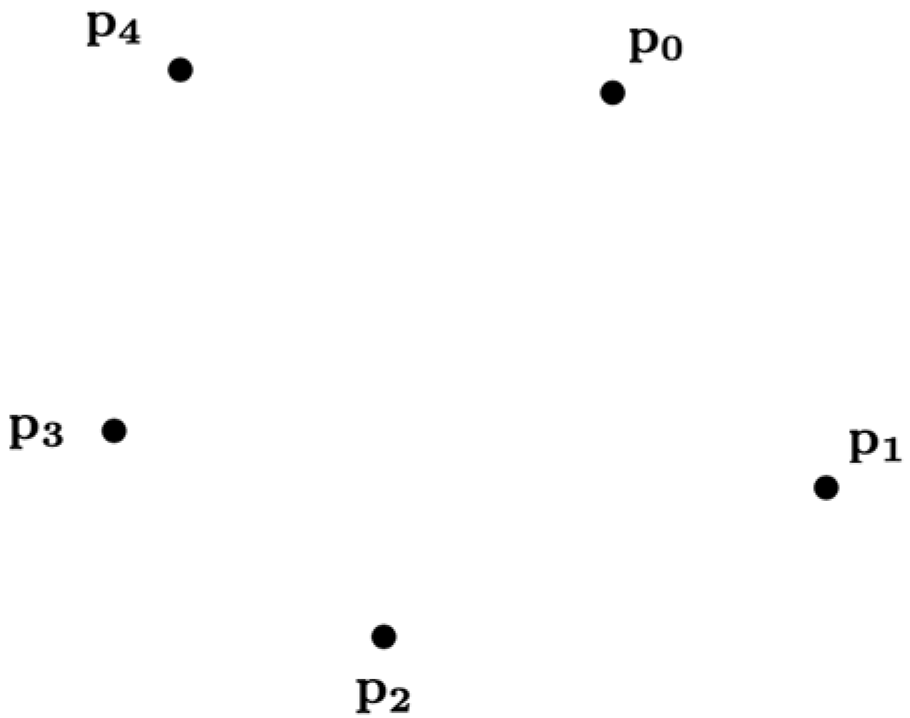
fonte: Toni Sellarès de Universitat de Girona

Insper

Interpolando Pontos e Vetores

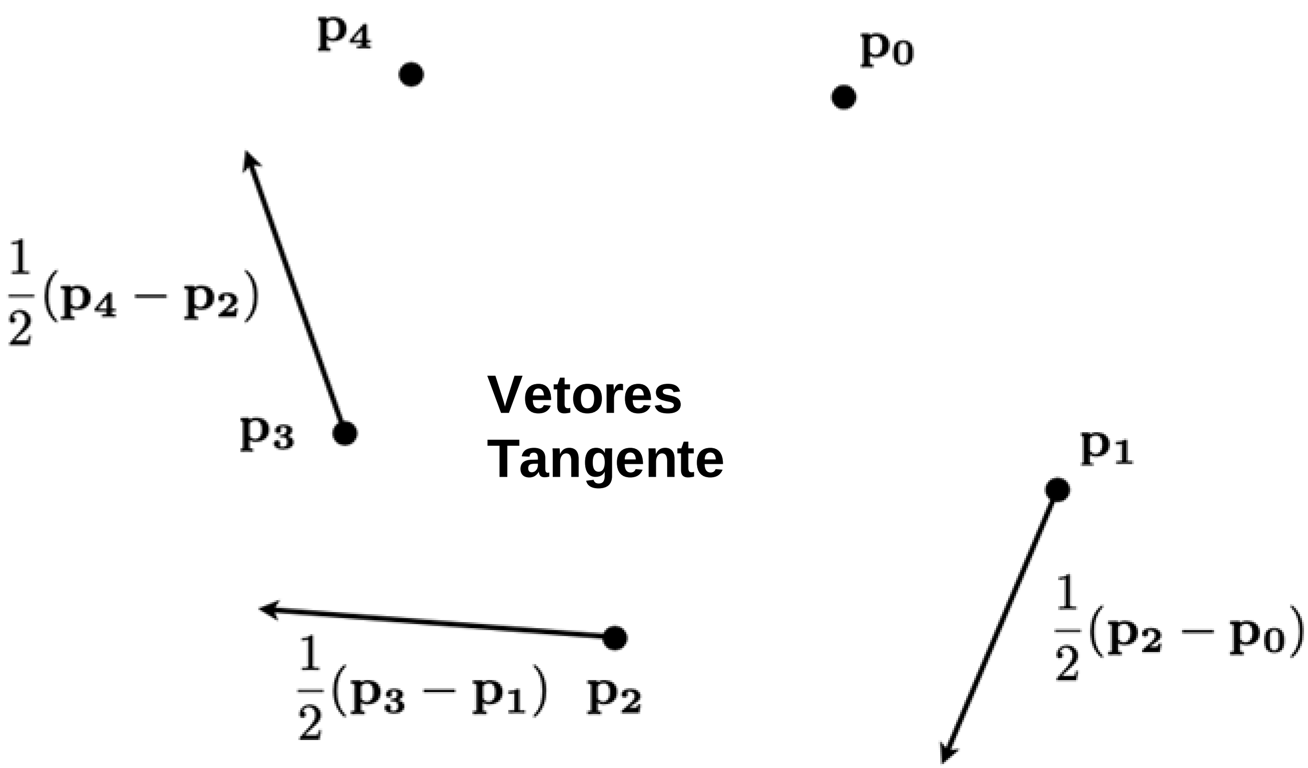
É possível interpolar pontos tão fácil quanto valores ?

Por exemplo: ponto (0,1,3) no espaço 3D, ou mesmo um vetor geral na dimensão N



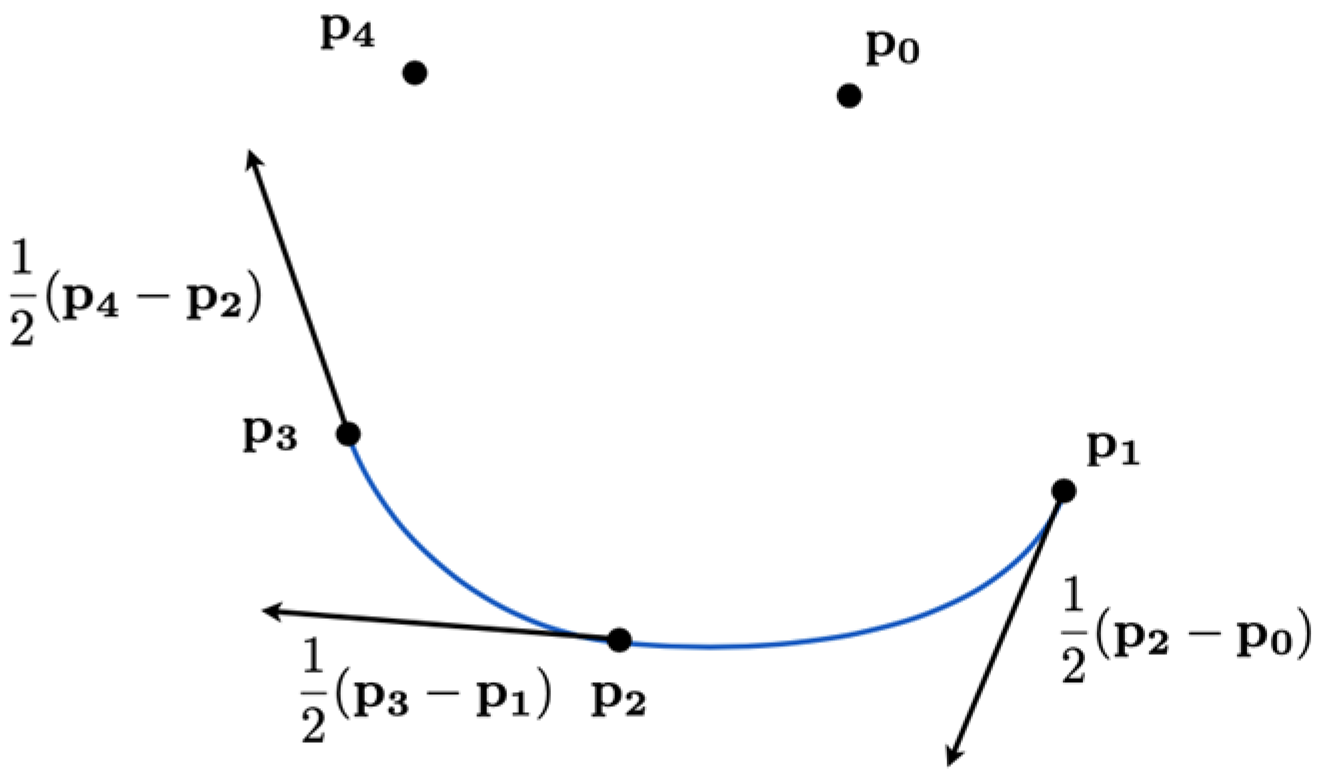
Pontos de controle da spline 3D de Catmull-Rom

É possível interpolar pontos tão fácil quanto valores ?



Vetores tangente 3D do Catmull-Rom

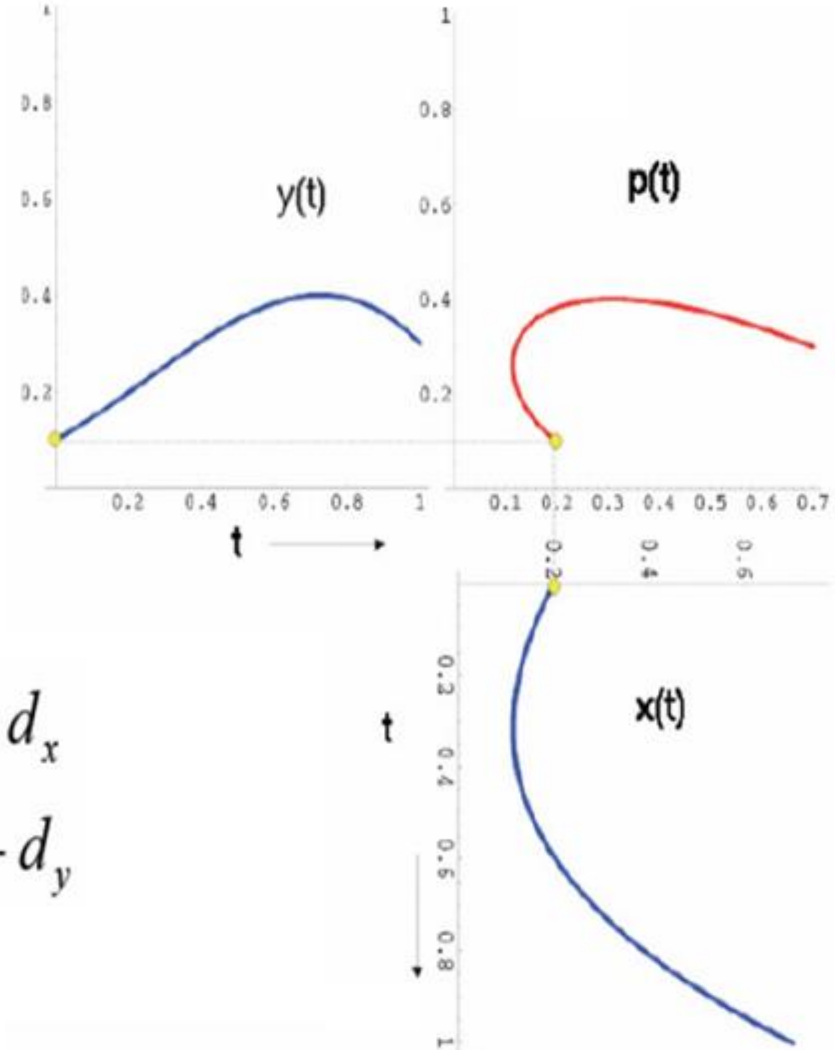
É possível interpolar pontos tão fácil quanto valores ?



Curvas do espaço 3D de Catmull-Rom

Insper

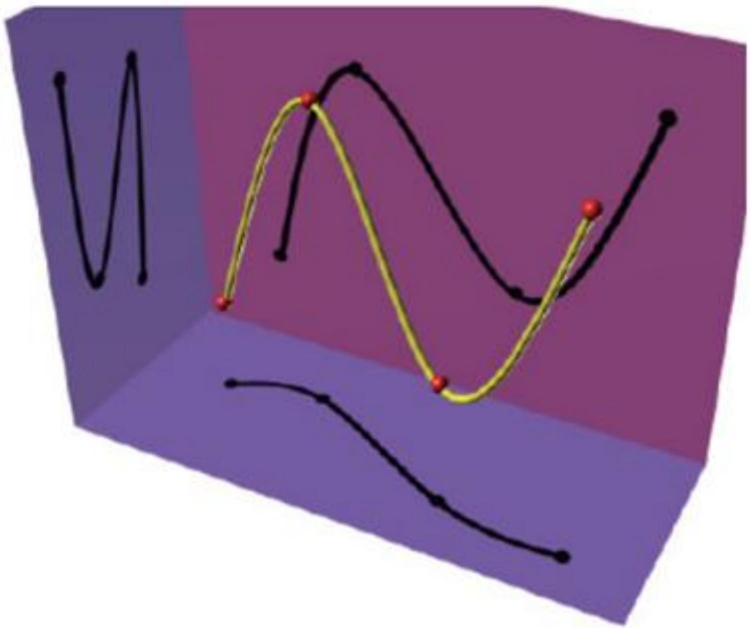
Curvas Paramétricas



$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$
$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$

Insper

Curvas Paramétricas



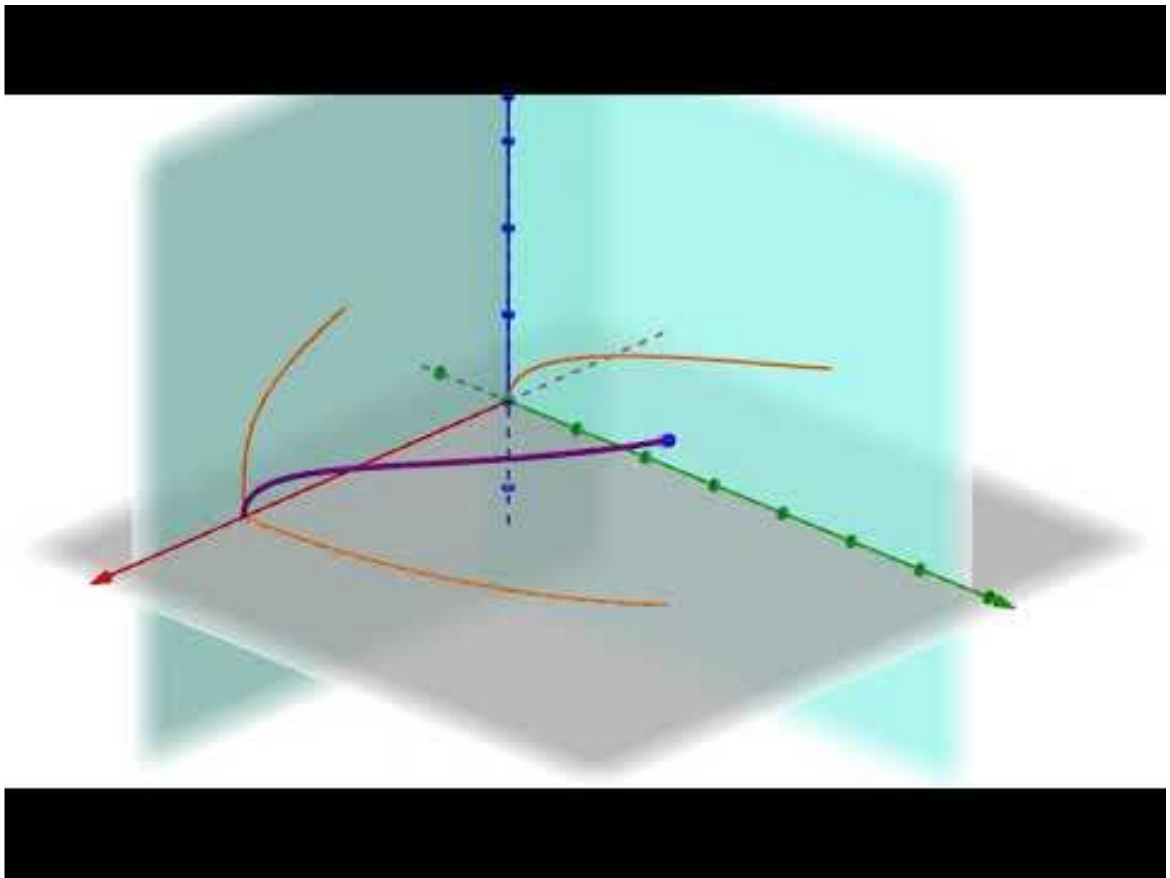
$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$

$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z$$

Curvas Paramétricas

Exemplo: $c(t) = \left(2\cos t\,, 3\,\text{sen}\, t\,, \sqrt{t}\right);\ \ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$



Forma Matricial para o Espaço de Curva Catmull-Rom

Use a forma matricial Hermite

- Pontos e tangentes dadas pelas regras Catmull-Rom

Pontos Hermite

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{p}_1$$

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{p}_2$$

Tangentes Hermite

$$\mathbf{h}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0)$$

$$\mathbf{h}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz Hermite}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\text{Converte entradas Catmull-Rom para entradas Hermite}} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}$$

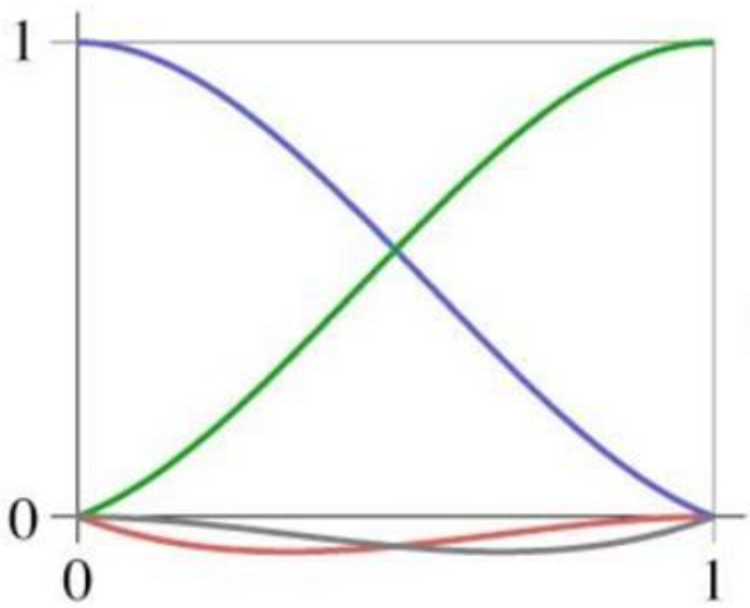
Forma Matricial para o Espaço de Curva Catmull-Rom

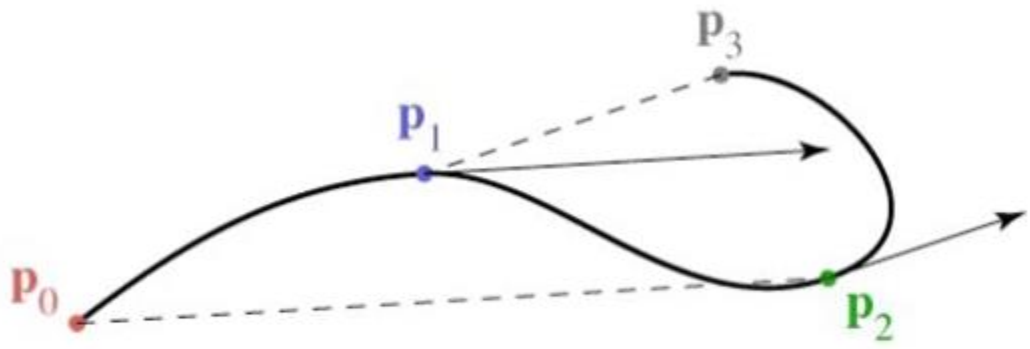
$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}$$

$$P(t) = C_{0(t)}\mathbf{p}_0 + C_{1(t)}\mathbf{p}_1 + C_{2(t)}\mathbf{p}_2 + C_{3(t)}\mathbf{p}_3$$

Colunas de matriz = funções interpoladoras Catmull-Rom

Funções Interpoladoras Catmull-Rom





Insper

Double Buffering

As imagens são organizadas em Buffers.

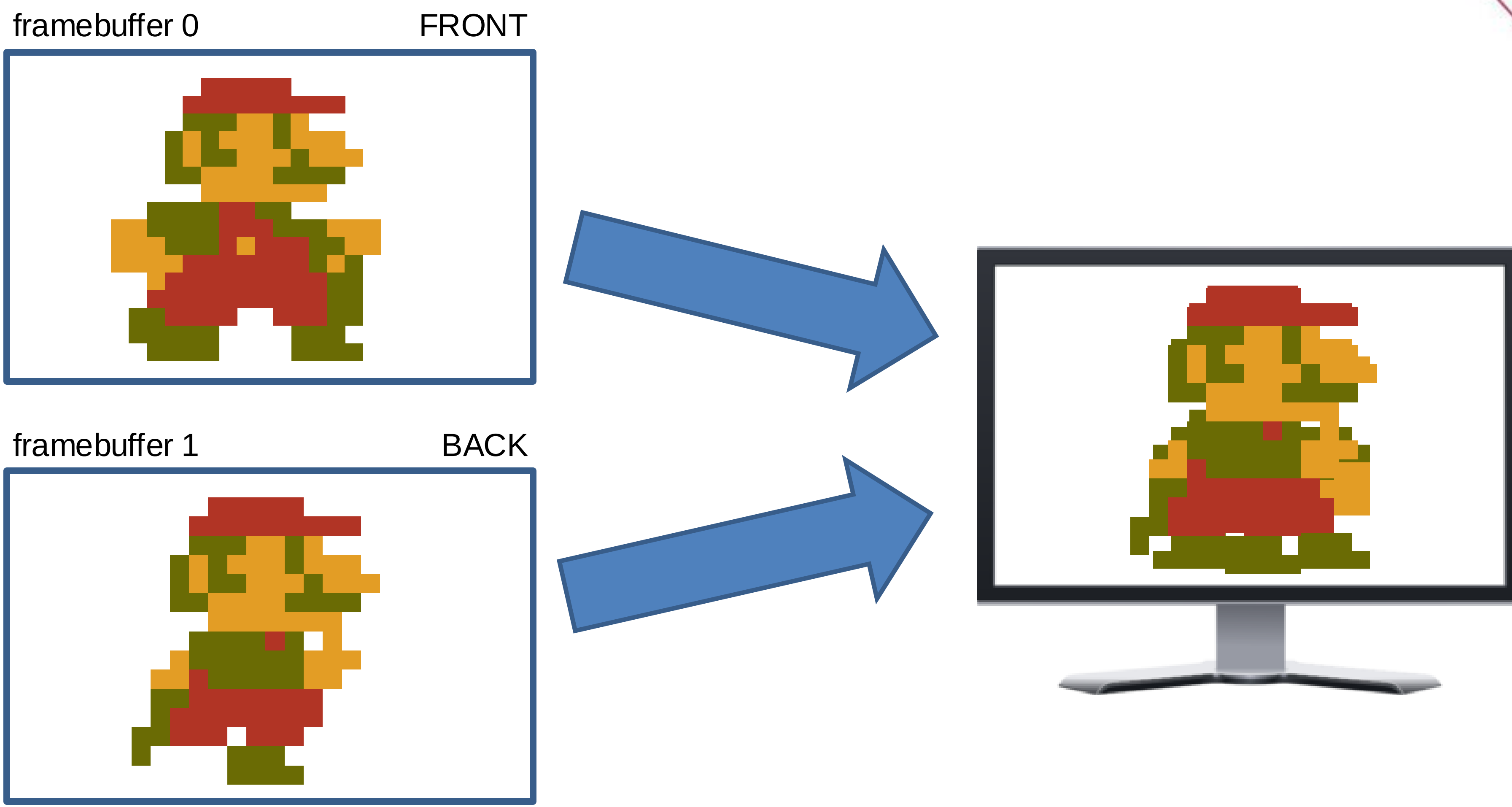
Tradicionalmente em computação gráfica temos o:

- Front Buffer
- Back Buffer

Durante a renderização as imagens são desenhadas no Back Buffer, enquanto as imagens exibidas vem do Front Buffer.

Na atualização de quadros, os buffers são trocados (Page Flipping). O Back Buffer é então limpo e se pode desenhar novamente nele.

Double Buffering



Insper

Novos Nós X3D : TimeSensor

TimeSensor pode ser usado para:

- Condução de simulações e animações contínuas;
- Controlar atividades periódicas;
- Iniciar eventos de ocorrência única, como um despertador;

O ciclo de um nó TimeSensor dura **cycleInterval** segundos. Se, no final de um ciclo, o valor do **loop** for FALSE, a execução é encerrada. Já se o loop for TRUE no final de um ciclo, um nó dependente do tempo continua a execução no próximo ciclo. Deve retornar a fração de tempo passada em **fraction_changed**.

```
TimeSensor : X3DTimeDependentNode, X3DSensorNode {
  SFTime  [in,out] cycleInterval    1     (0,∞)
  SFBool  [in,out] enabled          TRUE
  SFBool  [in,out] loop             FALSE
  SFNode  [in,out] metadata         NULL  [X3DMetadataObject]
  SFTime  [in,out] pauseTime        0     (-∞,∞)
  SFTime  [in,out] resumeTime       0
  SFTime  [in,out] startTime        0     (-∞,∞)
  SFTime  [in,out] stopTime         0     (-∞,∞)
  SFTime  [out]    cycleTime
  SFTime  [out]    elapsedTime
  SFFloat [out]    fraction_changed
  SFBool  [out]    isActive
  SFBool  [out]    isPaused
  SFTime  [out]    time
}
```

Novos Nós X3D : SplinePositionInterpolator

Interpola não linearmente entre uma lista de vetores 3D. O campo **keyValue** possui uma lista com os valores a serem interpolados, **key** possui uma lista respectiva de chaves dos valores em **keyValue**, a fração a ser interpolada vem de **set_fraction** que varia de zero a um. O campo **keyValue** deve conter exatamente tantos vetores 3D quanto os quadros-chave no **key**. O campo **closed** especifica se o interpolador deve tratar a malha como fechada, com uma transições da última chave para a primeira chave. Se os **keyValues** na primeira e na última chave não forem idênticos, o campo closed será ignorado. O resultado final é definido no **value_changed**.

```
SplinePositionInterpolator : X3DInterpolatorNode {
  SFFloat [in]     set_fraction             (-∞,∞)
  SFBool  [in,out] closed            FALSE
  MFFloat [in,out] key               []     (-∞,∞)
  MFVec3f [in,out] keyValue          []     (-∞,∞)
  MFVec3f [in,out] keyVelocity       []     (-∞,∞)
  SFNode  [in,out] metadata          NULL   [X3DMetadataObject]
  SFBool  [in,out] normalizeVelocity FALSE
  SFVec3f [out]    value_changed
}
```


Insper

Novos Nós X3D : OrientationInterpolator

Interpola rotações são absolutas no espaço do objeto e, portanto, não são cumulativas. Uma orientação representa a posição final de um objeto após a aplicação de uma rotação. Um OrientationInterpolator interpola entre duas orientações calculando o caminho mais curto na esfera unitária entre as duas orientações. A interpolação é linear em comprimento de arco ao longo deste caminho. Os resultados são indefinidos se as duas orientações forem diagonalmente opostas. O campo **keyValue** possui uma lista com os valores a serem interpolados, **key** possui uma lista respectiva de chaves dos valores em **keyValue**, a fração a ser interpolada vem de **set_fraction** que varia de zero a um. O campo **keyValue** deve conter exatamente tantas rotações 3D quanto os quadros-chave no **key**. O resultado final é definido no **value_changed**.

```
OrientationInterpolator : X3DInterpolatorNode {
  SFFloat    [in]     set_fraction         (-∞,∞)
  MFFloat    [in,out] key             []   (-∞,∞)
  MFRotation [in,out] keyValue        []   [-1,1] or (-∞,∞)
  SFNode     [in,out] metadata        NULL [X3DMetadataObject]
  SFRotation [out]    value_changed
}
```

Declaração ROUTE

Em X3D as conexões entre campos de um nó para campos de outros nós usando são realizadas pela instrução ROUTE.

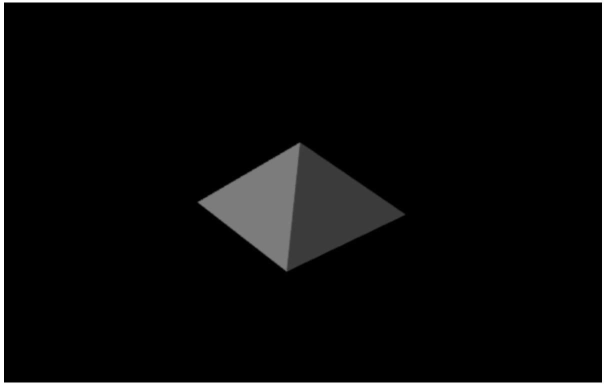
```
ROUTE <fromNodeName> <fromFieldName> <toNodeName> <toFieldName>
```

onde <**fromNodeName**> identifica o nó que irá gerar um evento, <**fromFieldName**> é o nome do campo do nó gerador do qual originará o evento, <**toNodeName**> identifica o nó que receberá um evento, e <**toFieldName**> identifica o campo no nó de destino que receberá o evento.

ROUTEs não são nós. A instrução ROUTE é uma construção para estabelecer caminhos de eventos entre campos especificados de nós.

Quinta (e última) parte do projeto 1

onda.x3d



piramide.x3d

https://lpsoares.github.io/Renderizador/

Computação Gráfica

Luciano Soares
<lpsoares@insper.edu.br>

Fabio Orfali
<fabioO1@insper.edu.br>