

# Computação Gráfica

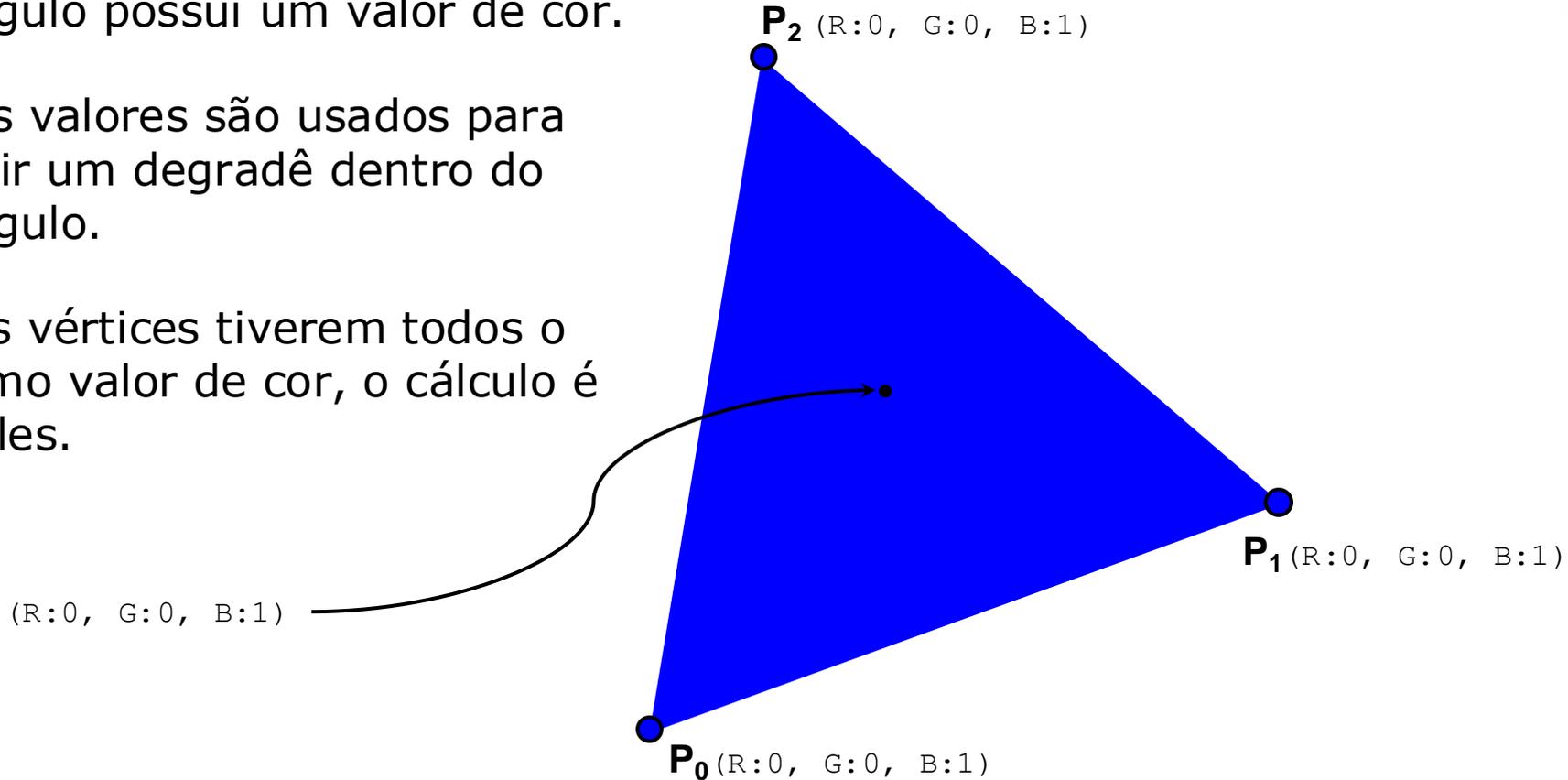
Aula 9: Interpolação em Triângulos

# Desenhando Triângulos Coloridos

Vamos definir que cada vértice do triângulo possui um valor de cor.

Esses valores são usados para definir um degradê dentro do triângulo.

Se os vértices tiverem todos o mesmo valor de cor, o cálculo é simples.



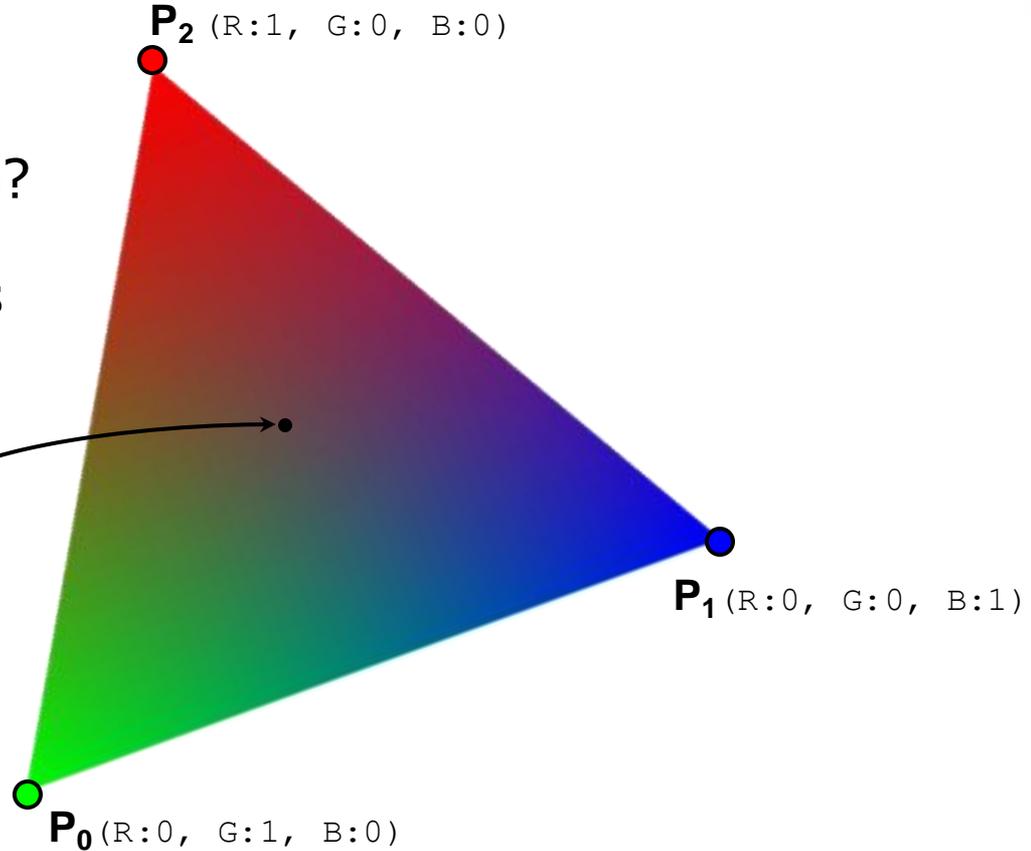
# Desenhando Triângulos Coloridos

Mas e se cada vértice tiver uma cor diferente?

Qual a cor de um ponto qualquer dentro do triângulo?

Como podemos interpolar os valores de cor no interior do triângulo?

(R:?, G:?, B:?)



# Interpolação no interior de Triângulos

## **Por que queremos interpolar?**

Definir valores pelos vértices e obter valores que variam suavemente pela superfície. Um belo degrade 😊

## **O que queremos interpolar?**

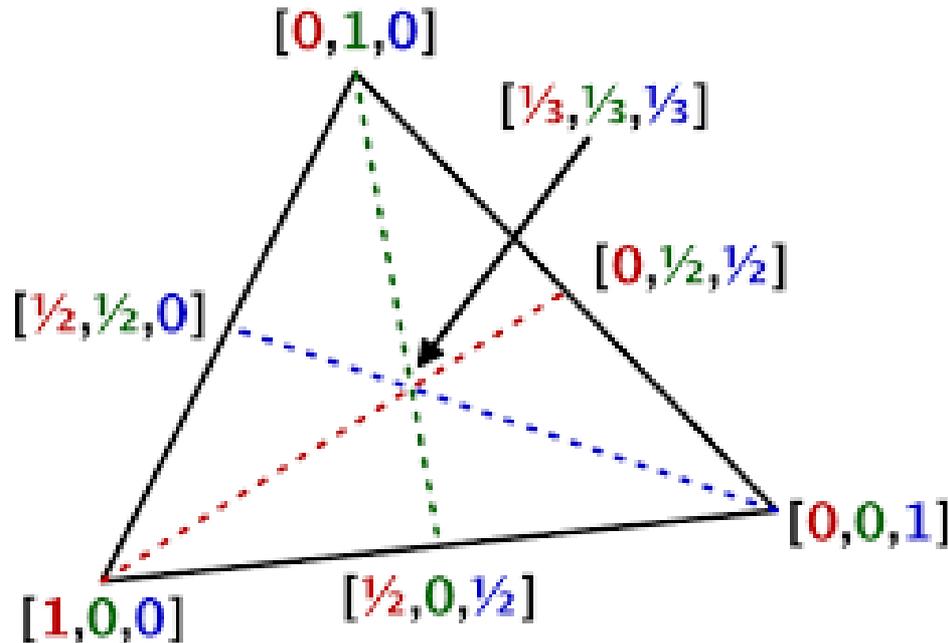
Cores, Coordenadas de textura, Vetores normais, ...

## **Como podemos fazer a interpolação?**

Coordenadas baricêntricas

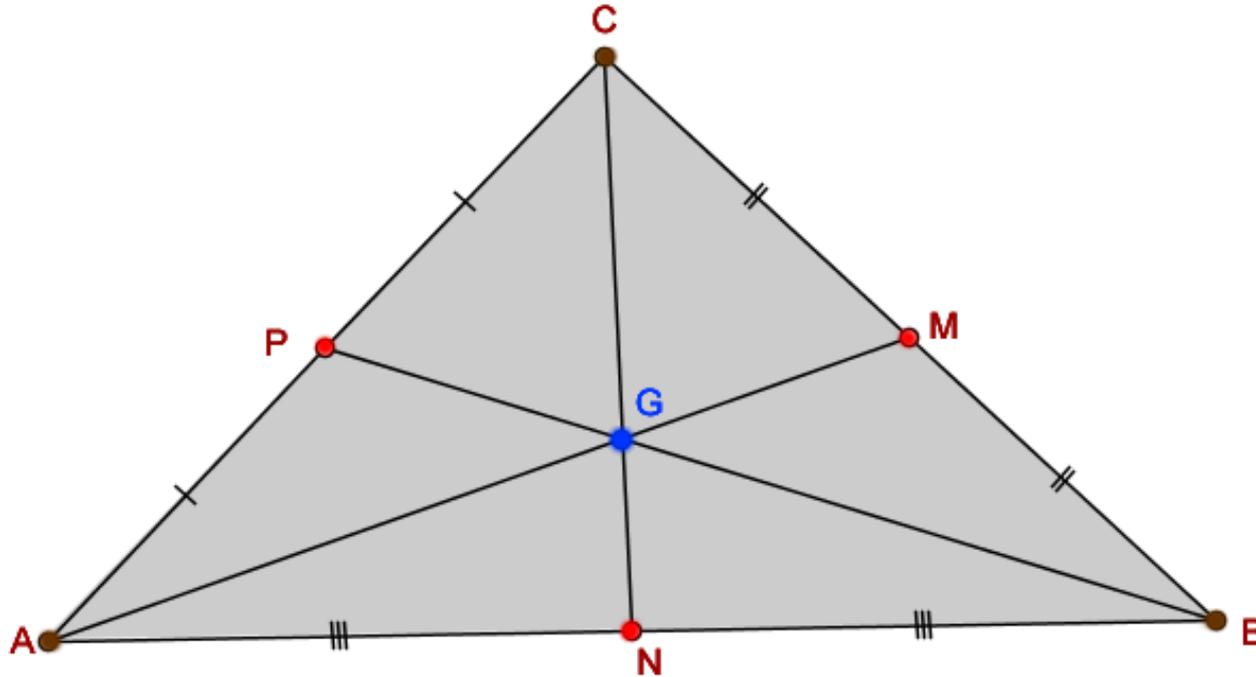
# Coordenadas Baricêntricas

Usando coordenadas baricêntricas para interpolar dados ou atributos de vértices.



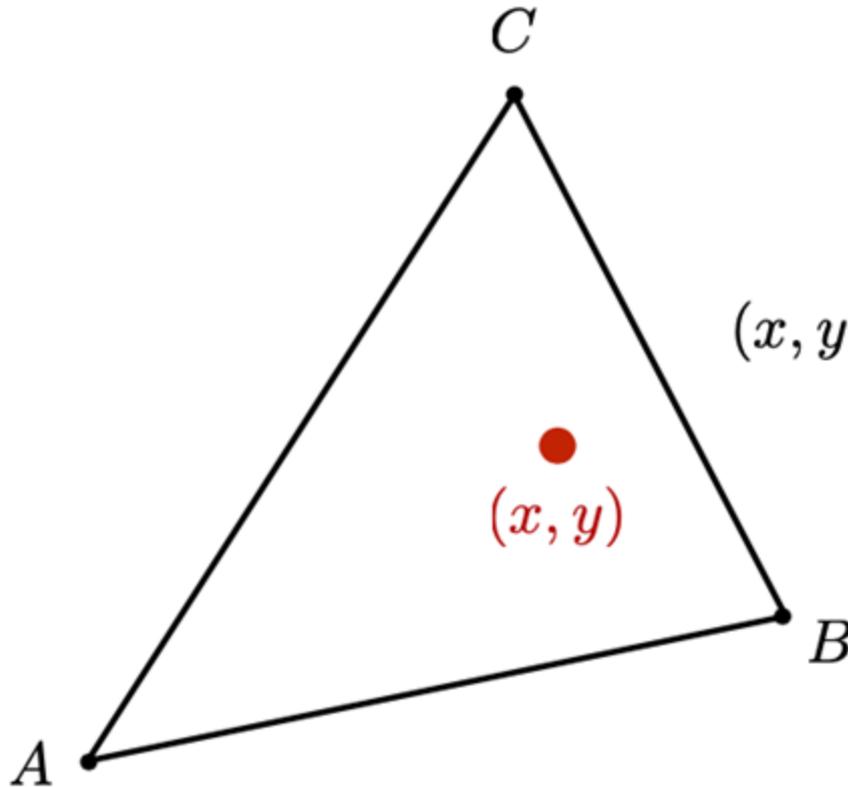
# Definição de Baricentro

O baricentro é determinado pelo encontro das medianas de um triângulo.



# Coordenadas Baricêntricas

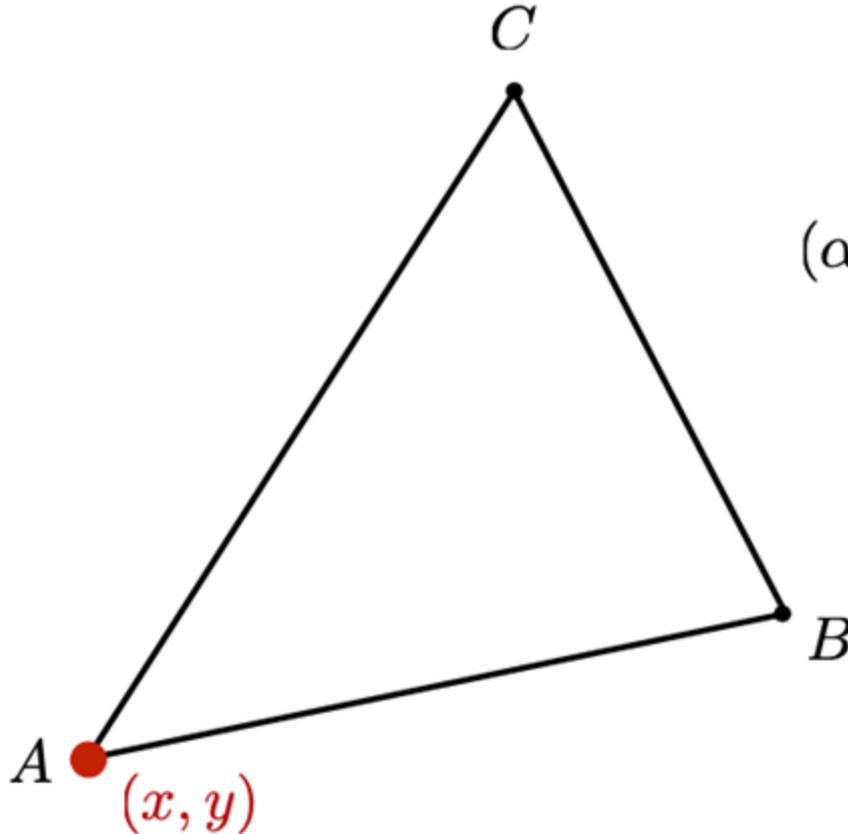
Um sistema de coordenadas para triângulos  $(\alpha, \beta, \gamma)$



$$(x, y) = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

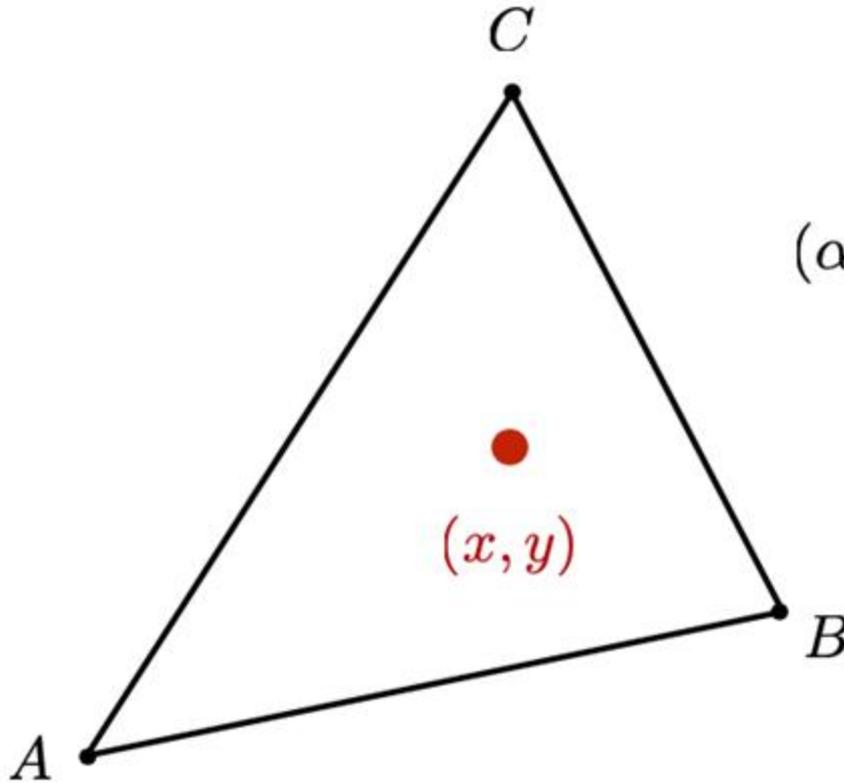
# Coordenadas Baricêntricas - Exemplo



$$(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$$

$$(x, y) = \alpha A + \beta B + \gamma C$$
$$= A$$

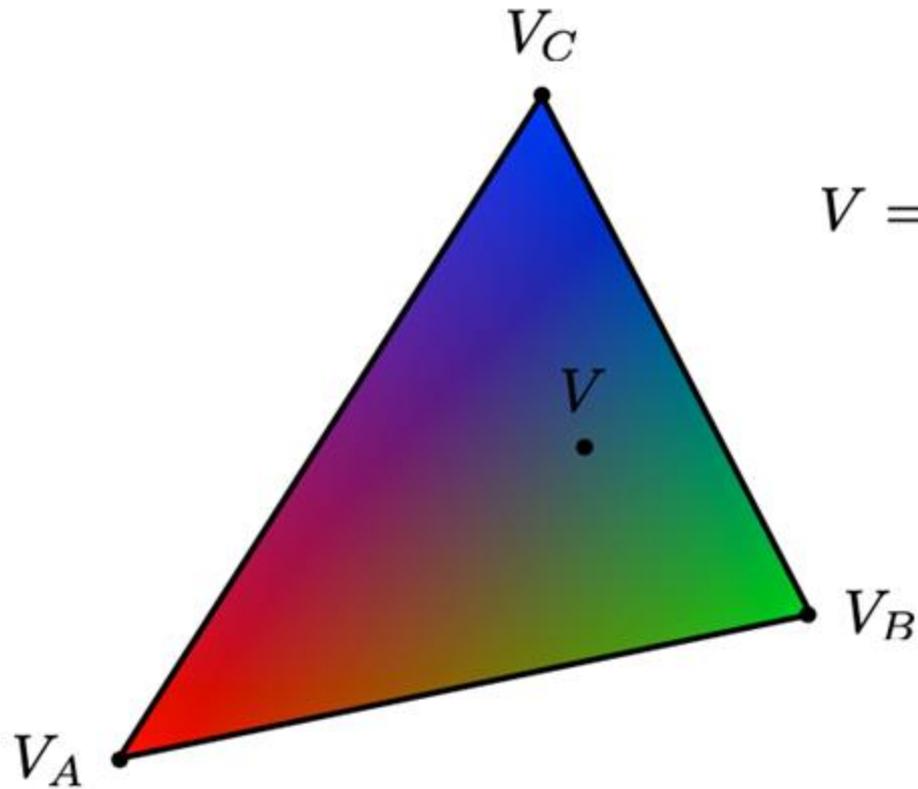
# Coordenadas Baricêntricas - Exemplo



$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$(x, y) = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

# Interpolação Linear Pelo Triângulo



$$V = \alpha V_A + \beta V_B + \gamma V_C$$

$V_A$ ,  $V_B$ ,  $V_C$  podem ser posições, coordenadas de textura, cores, vetores normais, atributos de materiais ...

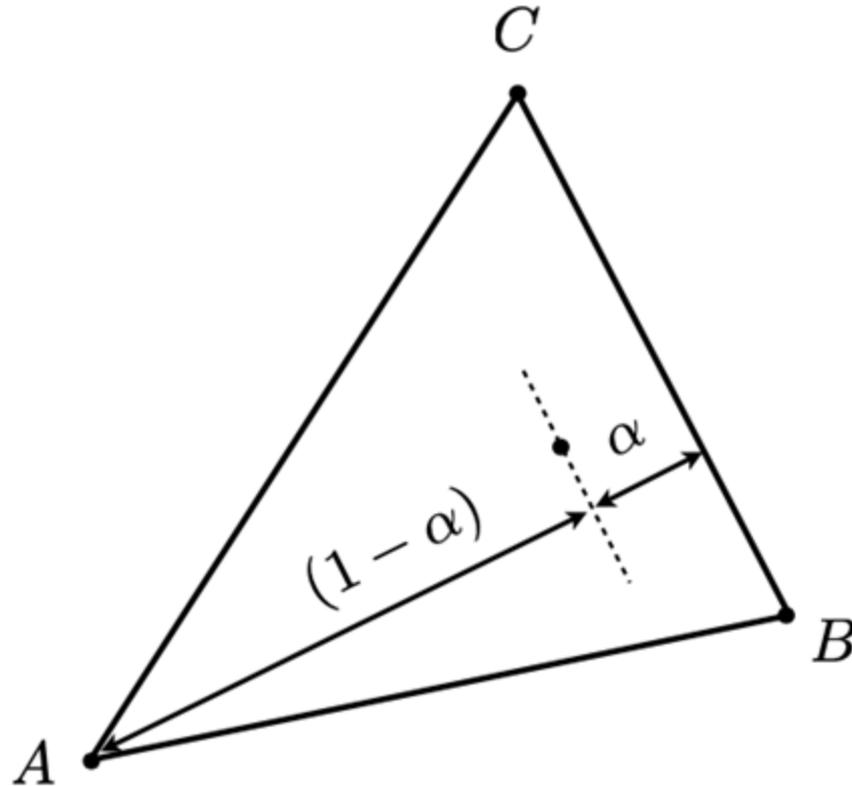
# Propostas de cálculos das coordenadas

Ponto de vista geométrico de:

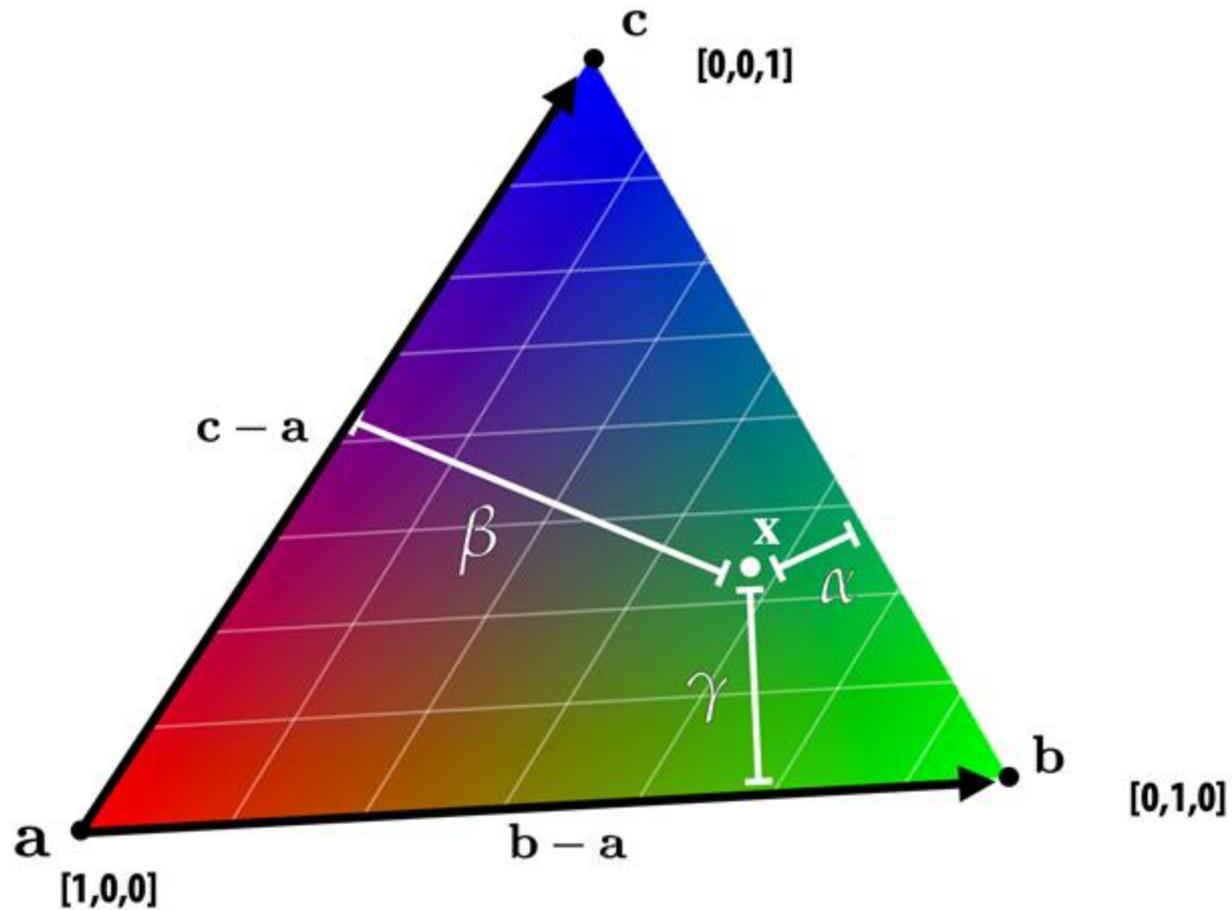
- distâncias proporcionais
- áreas proporcionais

# Coordenadas Baricêntricas

Ponto de vista geométrico de distâncias proporcionais



# Coordenadas Baricêntricas como Distâncias

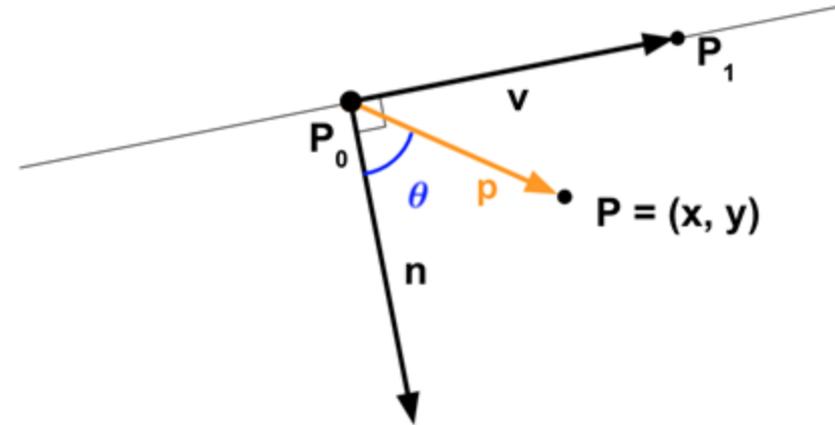


# Lembrando: Equação da Reta

$$L(x, y) = p \cdot n = (x - x_0; y - y_0) \cdot (y_1 - y_0; -(x_1 - x_0))$$

$$= (x - x_0)(y_1 - y_0) - (y - y_0)(x_1 - x_0)$$

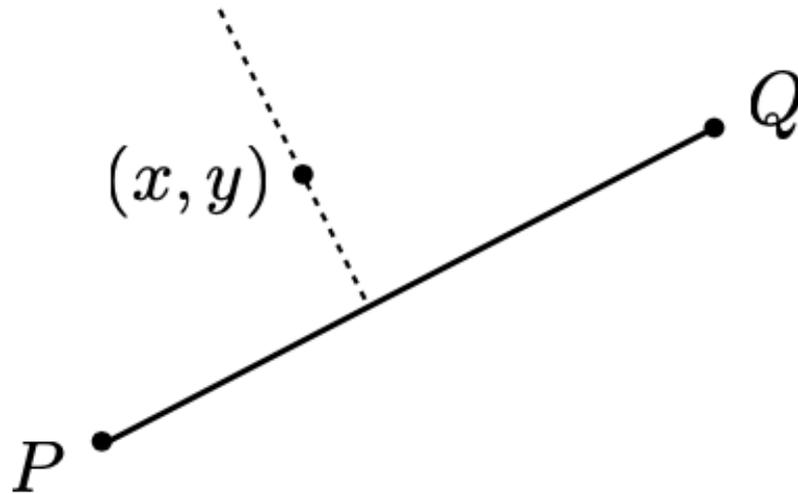
$$= (y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y + y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0)$$



# Calculando as Coordenadas Baricêntricas

$L_{PQ}(x, y)$  é a distância do ponto  $(x, y)$  até a linha PQ.

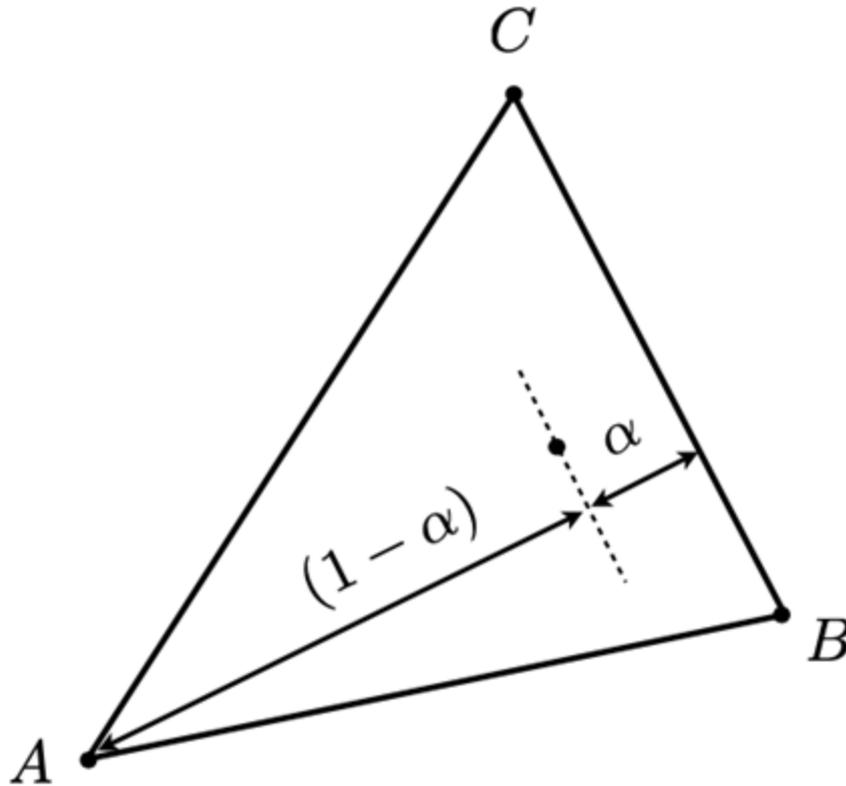
$$L_{PQ}(x, y) = (y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y + y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0)$$



Obs: Cuidado com os sinais, lembre-se de que nas coordenadas da tela o Y aponta para baixo então seus cálculos podem ficar com valores invertidos.

# Coordenadas Baricêntricas

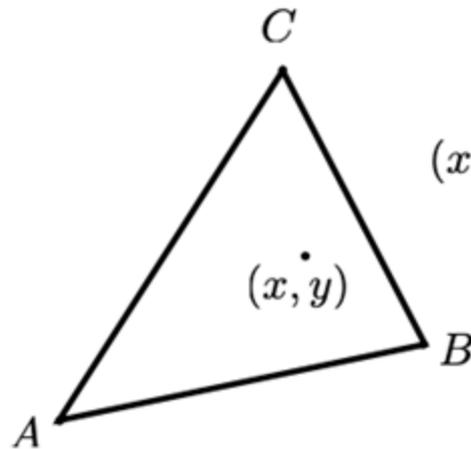
Ponto de vista geométrico – distâncias proporcionais



$$\alpha = \frac{L_{BC}(x, y)}{L_{BC}(x_A, y_A)}$$

Construções similares  
para as outras  
coordenadas

# Fórmulas das Coordenadas Baricêntricas



$$(x, y) = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

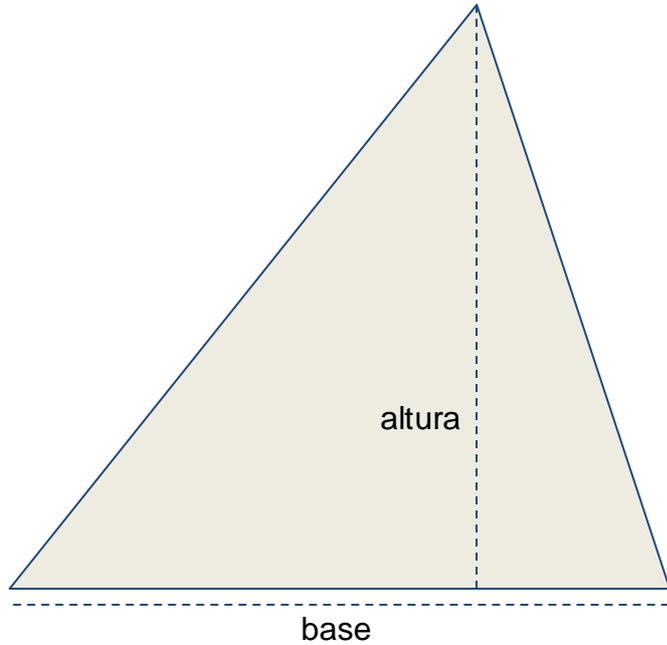
$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$\alpha = \frac{-(x - x_B)(y_C - y_B) + (y - y_B)(x_C - x_B)}{-(x_A - x_B)(y_C - y_B) + (y_A - y_B)(x_C - x_B)}$$

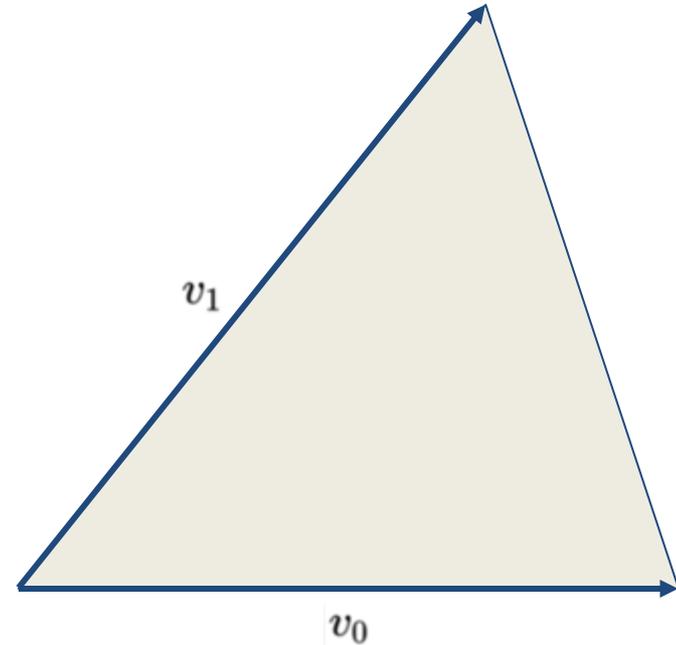
$$\beta = \frac{-(x - x_C)(y_A - y_C) + (y - y_C)(x_A - x_C)}{-(x_B - x_C)(y_A - y_C) + (y_B - y_C)(x_A - x_C)}$$

$$\gamma = 1 - \alpha - \beta$$

# Área de um triângulo



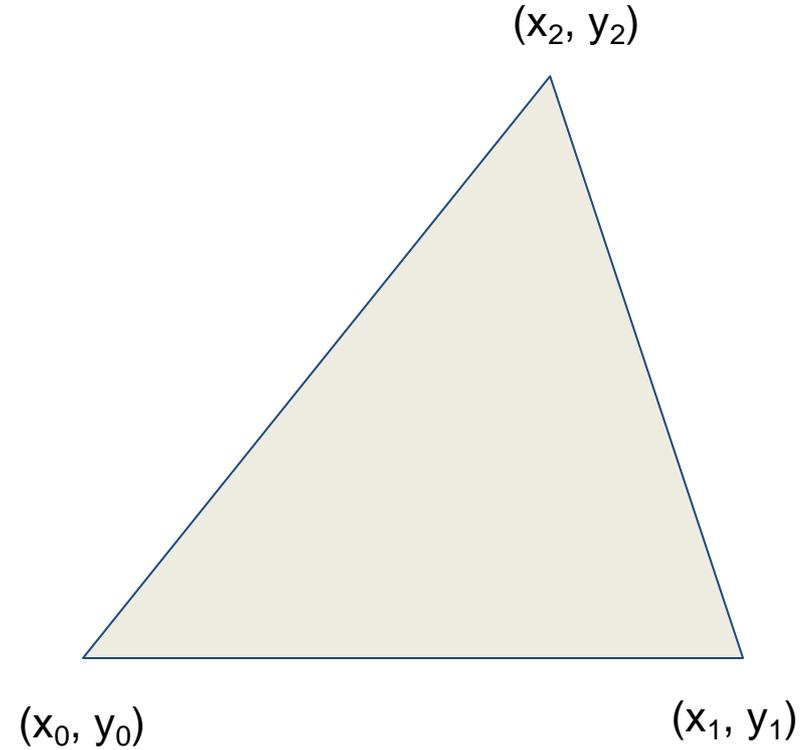
$$\text{area} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$



$$\text{area} = \frac{\|v_0 \times v_1\|}{2}$$

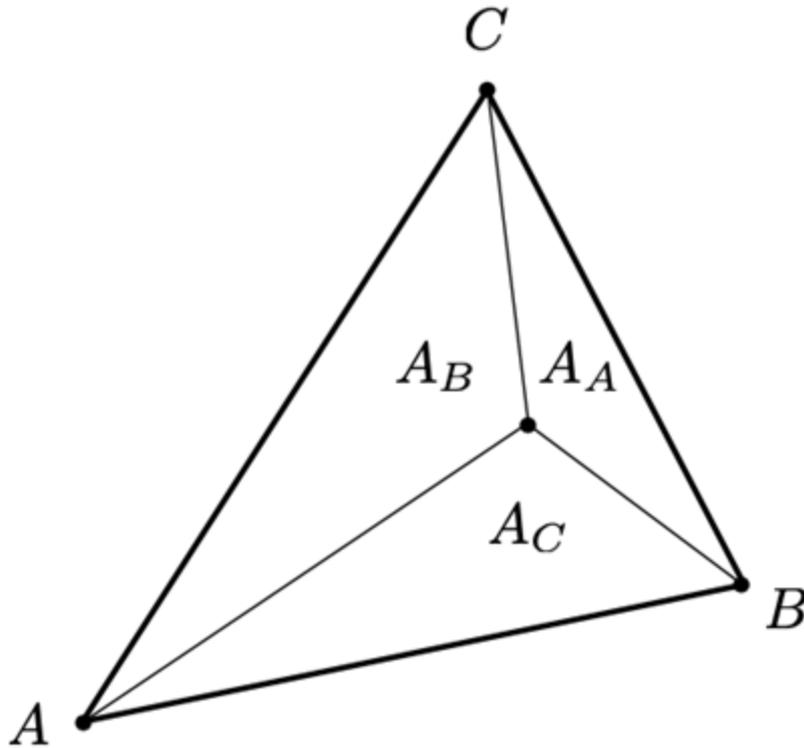
# Área do Triângulo

$$\text{Area} = |x_0(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_0) + x_2(y_0 - y_1)| / 2$$



# Coordenadas Baricêntricas

Ponto de vista geométrico de áreas proporcionais



$$\alpha = \frac{A_A}{A_A + A_B + A_C}$$

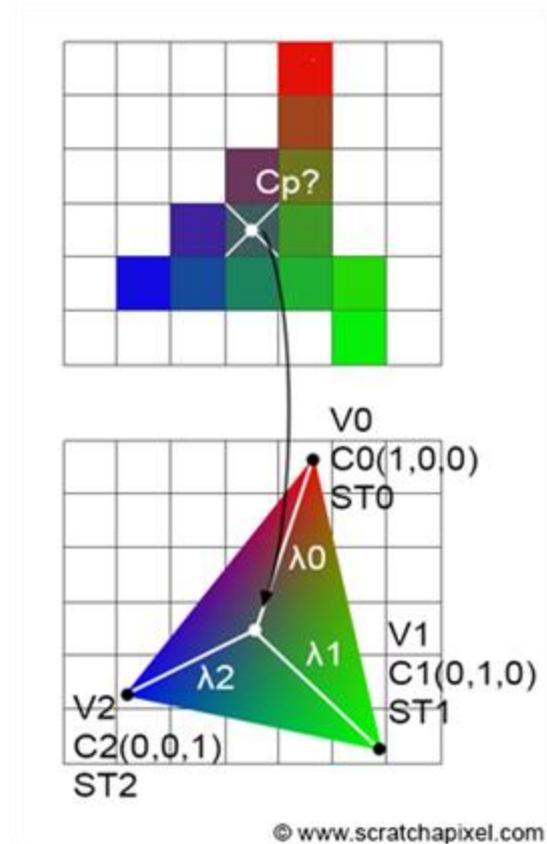
$$\beta = \frac{A_B}{A_A + A_B + A_C}$$

$$\gamma = \frac{A_C}{A_A + A_B + A_C}$$

Obs: Essa abordagem tem vantagens se você estiver usando produtos vetoriais nos seus cálculos.

# Processo de Rasterização

- O triângulo é projetado na tela, ou seja, os vértices do triângulo são convertidos do espaço da câmera (3D) para o espaço da tela (2D).
- Se um pixel se encontra dentro do triângulo, as coordenadas baricêntricas desse pixel são calculadas para interpolar os valores dos vértices e identificar o valor do pixel.



# Mapeamento de Texturas

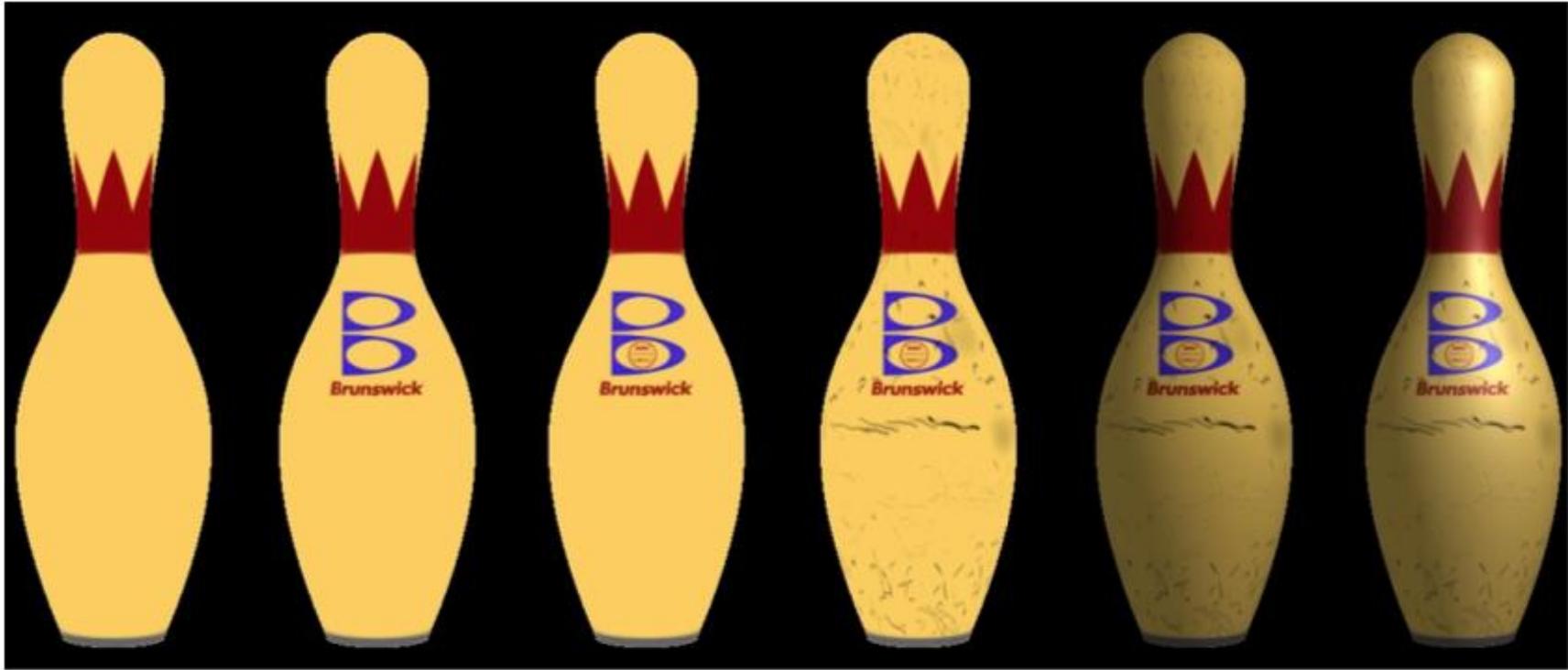


padrão na bola

padrão na madeira

Insper

# Realismos das Superfícies



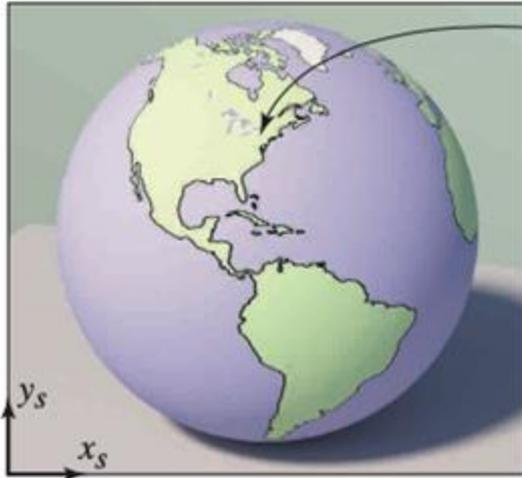
Chan et al.

- Adiciona detalhes sem aumentar a complexidade geométrica
- Se aplica uma imagem na geometria ou se pinta proceduralmente

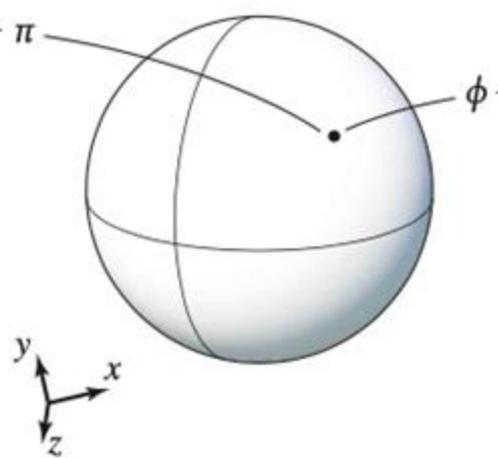
# Três Espaços

As superfícies habitam o espaço 3D do mundo

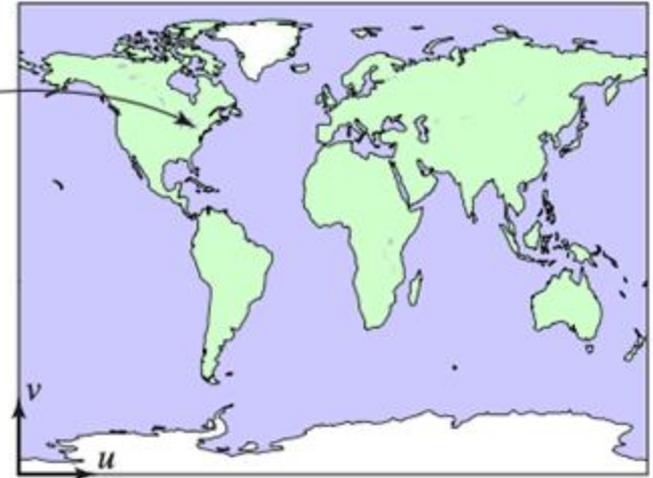
Cada ponto das superfícies 3D também tem uma posição onde fica na tela 2D e na textura 2D.



**Espaço da  
Tela**



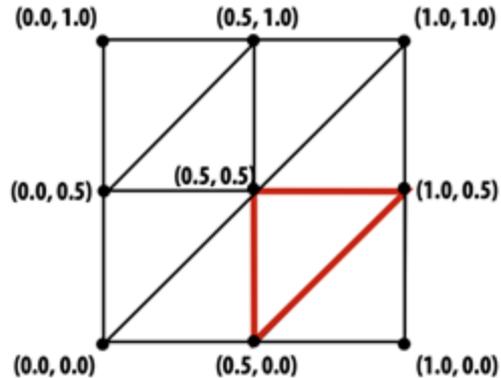
**Espaço do  
Mundo**



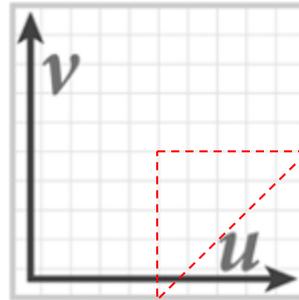
**Espaço da  
Textura**

# Coordenadas de Textura

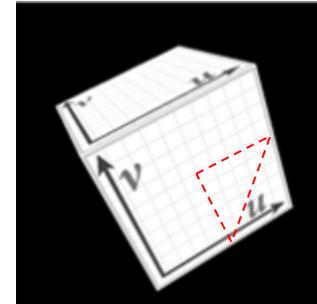
As coordenadas de Textura definem um mapeamento das coordenadas nas superfícies (pontos 3D no triângulo) para coordenadas de textura (pontos 2D na imagem).



Oito triângulos (uma face de um cubo) com parâmetros de superfície fornecida como coordenadas de textura por vértice.



As coordenadas de textura são definidas num espaço normalizado  $[0,1]^2$ . Localização do triângulo destacado no espaço de textura mostrado em vermelho.



Resultado final renderizado (cubo inteiro mostrado). Localização do triângulo após a projeção na tela mostrada em vermelho.

# Mapeamento das coordenadas de textura.



# Textura Aplicada na Superfície

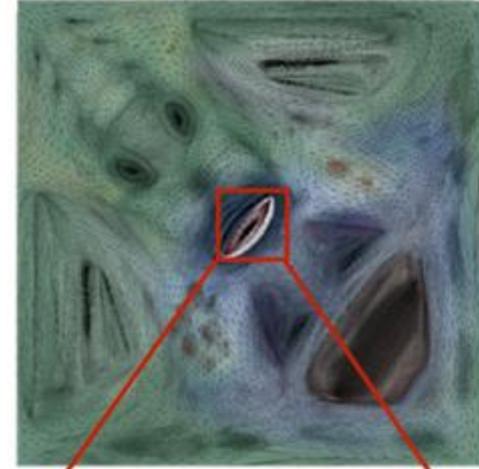
Renderização sem textura



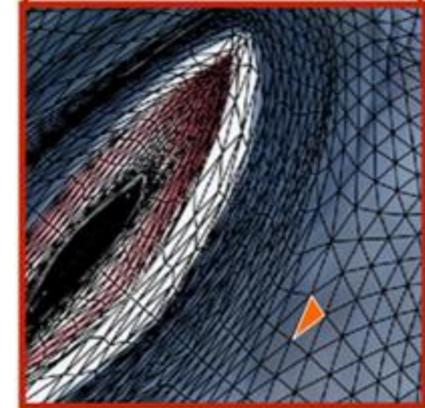
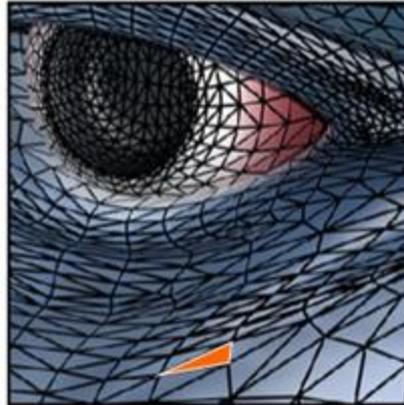
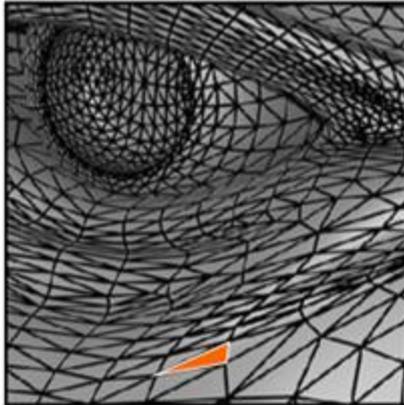
Renderização com textura



Textura



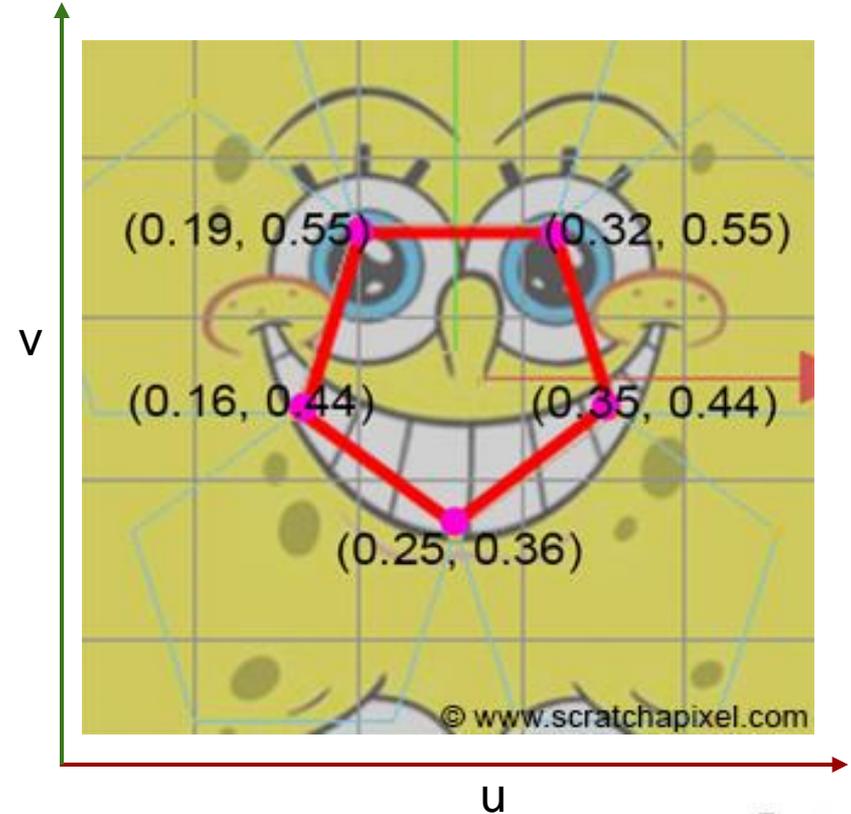
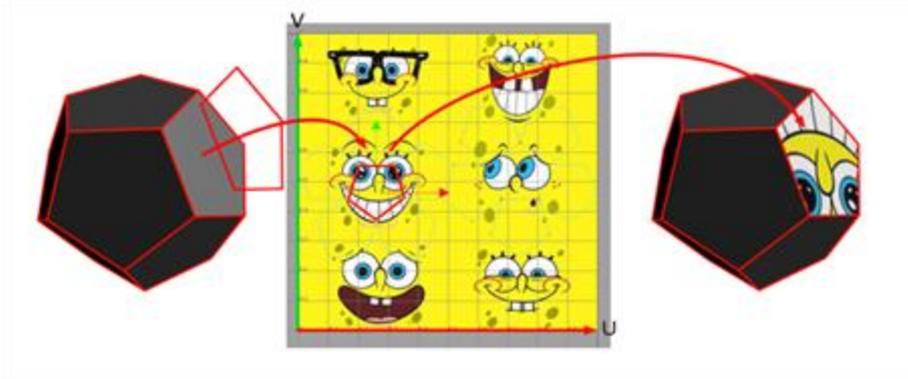
Zoom



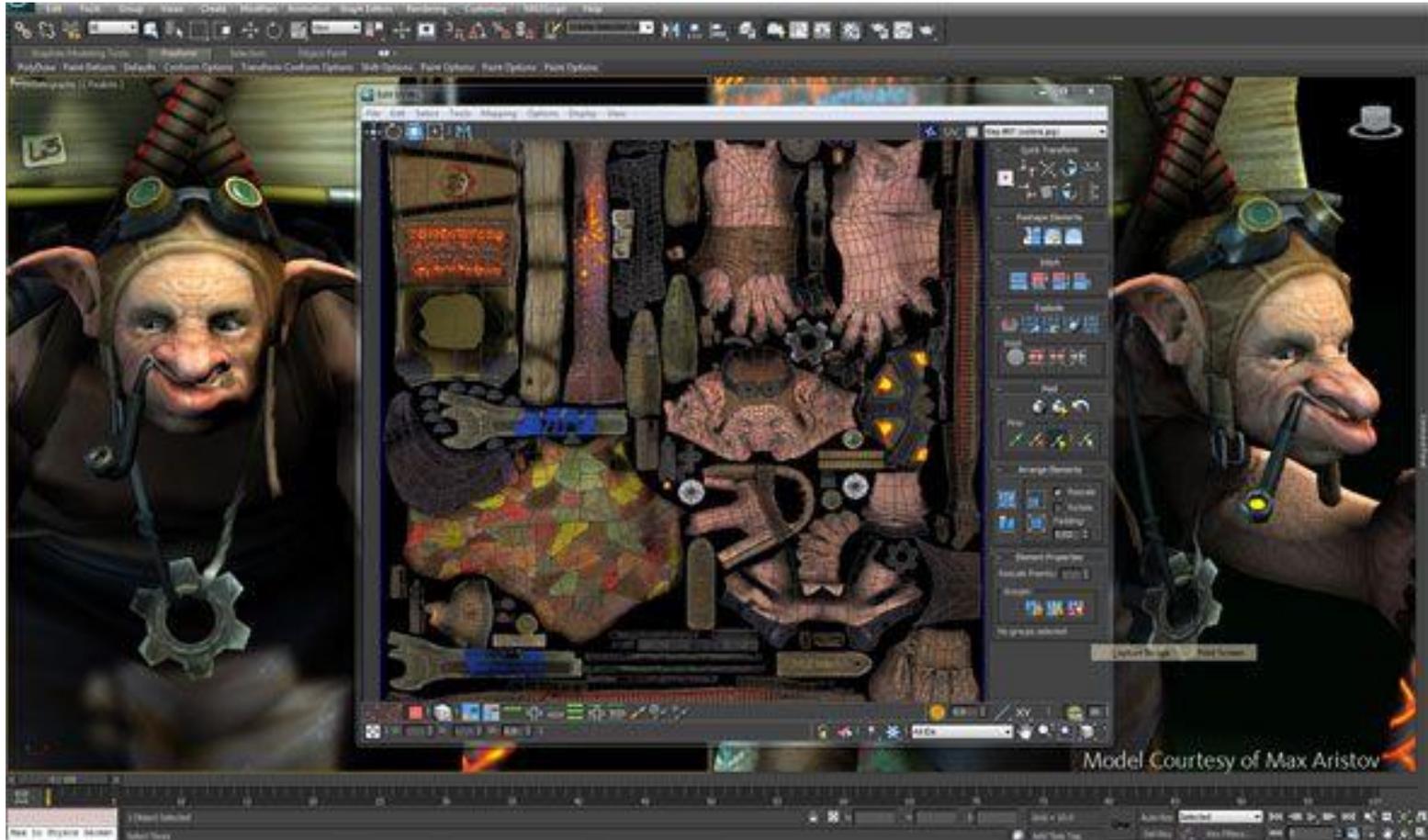
Cada triângulo "copia" um pedaço da textura para a superfície.

# UV Layout

O processo pelo qual as faces são dispostas na superfície da textura é chamado de layout UV.



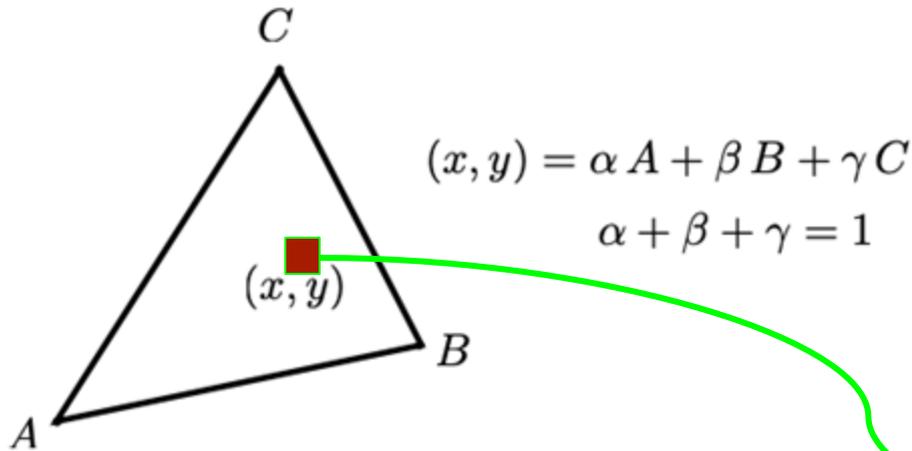
# Mapeamento de Texturas



Autodesk Student A-massdor  
Guest & Visiting Lecturer  
Ali Sajjad

# Operação de Mapeamento de Textura

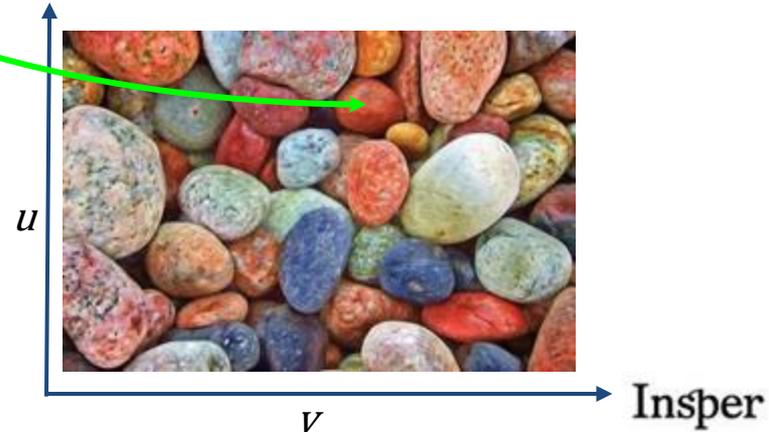
Ao rasterizar a tela no ponto  $(x, y)$  identificar o peso das coordenadas:



Os valores das coordenadas de textura são dois  $(u, v)$  que são definidos em cada vértice.

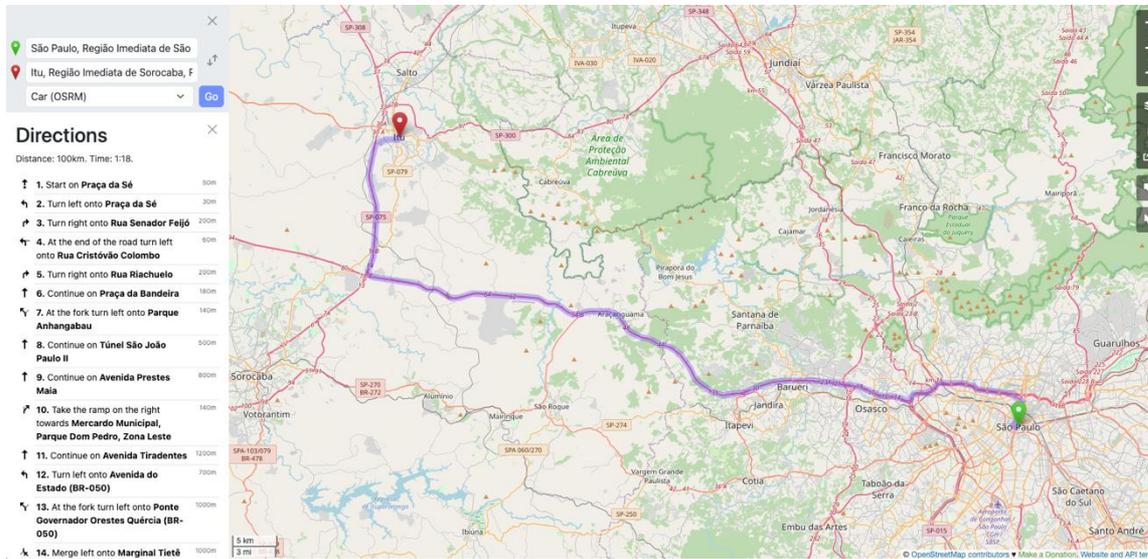
Use as mesmas interpolações para identifica o valor da coordenada de textura em  $(x, y)$  para valores  $(u, v)$

Avaliar o valor da cor na textura nas coordenadas  $(u, v)$  da textura.



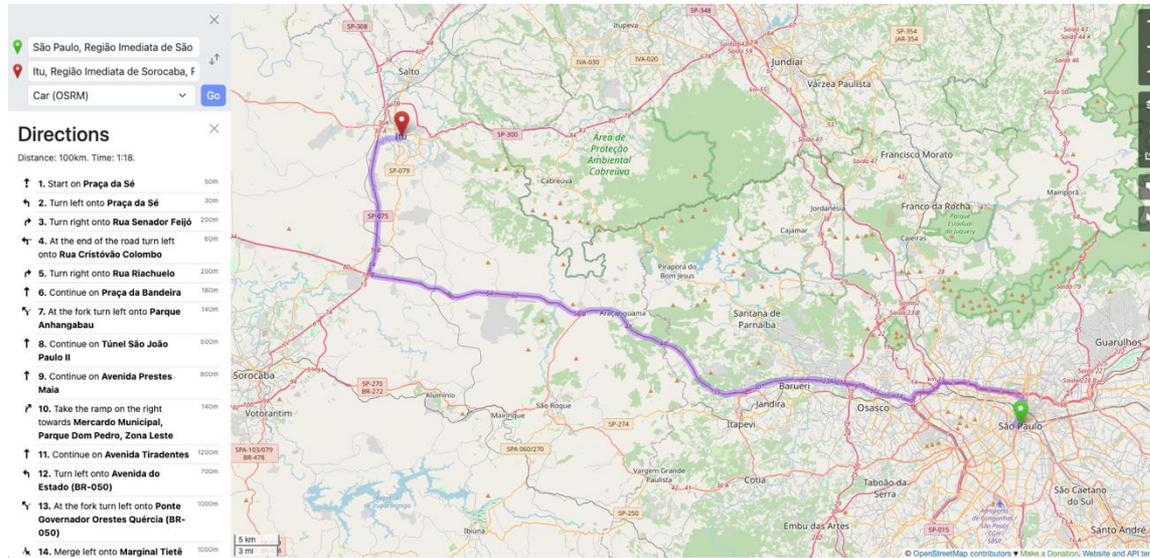
# Médias

Prof. Luciano e Fabio Orfali foram até Itú ver o grande orelhão da cidade. A distância é de ~100 km, assim eles dividiram  $\frac{1}{2}$  a  $\frac{1}{2}$  a condução para a ida.



# Médias

O prof. Luciano dirigiu a 100 km/h até Araçariguama que fica a 50 km de São Paulo, já o prof. Fabio dirigiu o restante a 125 km/h.



# Fazendo as contas: São Paulo -> Itú

São Paulo até Araçariguama

- 50 km de São Paulo
- 100 km/h

Araçariguama até Itú

- 50 km
- 125 km/h

Qual foi a velocidade média desse percurso?

$$v = \frac{100 + 125}{2} = 112.5 \text{ km/h ?}$$

# Refazendo as contas: São Paulo -> Itú

Foram:

- 50 km a 100 km/h = 0.5h
- 50 km a 125 km/h = 0.4h

Tempo total = 0.9h

Usando a fórmula de velocidade:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$100 / 0.9 \approx 111,1 \text{ km/h}$$

Problema: Como a distância está fixa, o que realmente influenciou a velocidade média é o tempo gasto em cada parte do trajeto, que está no denominador, não a distância.

# Média Harmônica

Pode ser necessária quando lidamos com taxas ou razões.

$$\bar{h} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

Restrições:

- **Valores Não Nulos:** A média harmônica não pode ser calculada se um dos valores da amostra for zero;
- **Valores Positivos:** Embora a média harmônica possa tecnicamente ser calculada com valores negativos, seu uso faz mais sentido com valores positivos.

# Conferindo as contas: São Paulo -> Itú

São Paulo até Araçariguama

- 50 km de São Paulo
- 100 km/h

Araçariguama até Itú

- 50 km
- 125 km/h

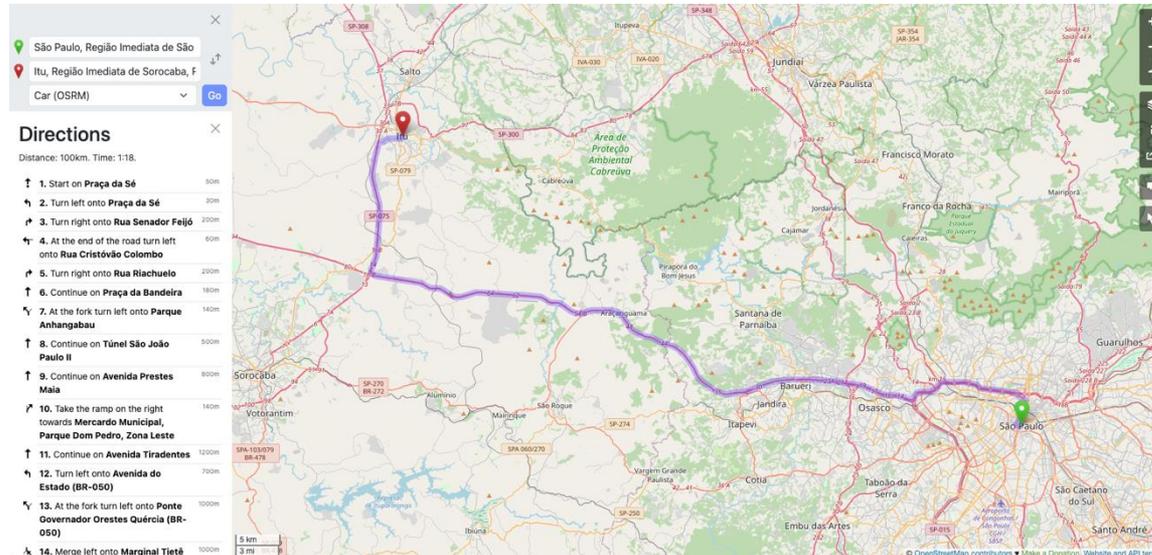
Qual foi a velocidade média desse percurso?

$$v = \frac{2}{\frac{1}{100} + \frac{1}{125}} = \frac{2}{0.01 + 0.008} = \frac{2}{0.018} \approx 111.1$$

A velocidade média da ida foi de **111.1 km/h**

# Médias

Na volta o prof. Luciano dirigiu novamente a 100 km/h até Osasco (80 km) e o prof. Fabio dirigiu o restante (20km) a 125 km/h. Qual foi a velocidade média nesse caso?



# Média Harmônica Ponderada

Com um conjunto de pesos  $w_i$  associados ao conjunto de valores  $x_i$  a média harmônica ponderada é definida por:

$$\frac{\sum_{i=1}^n w_i}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{x_i}}$$

# Fazendo as contas: Itú -> São Paulo

$$v = \frac{100}{\frac{80}{100} + \frac{20}{125}}$$

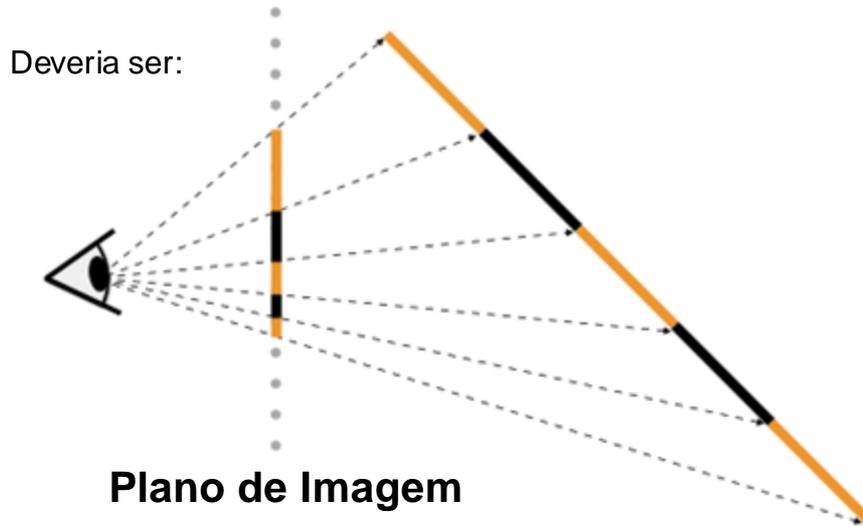
$$v = \frac{1}{\frac{0.8}{100} + \frac{0.2}{125}}$$

$$v = \frac{1}{0.008 + 0.0016} = \frac{1}{0.0096} \approx 104.167$$

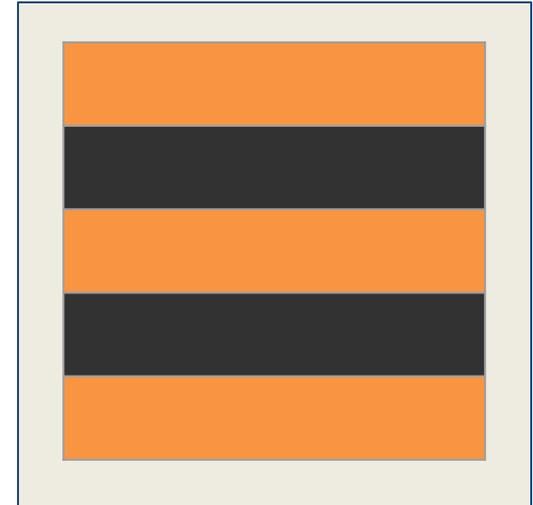
A velocidade média da volta foi de 104.167 km/h

# Projeções Perspectivas Cria Não Linearidades

Uma interpolação no espaço da tela (2D) não é a mesma de no espaço da câmera (3D).

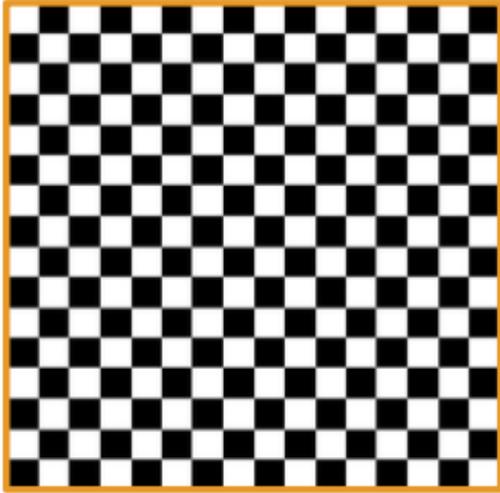


Porém fica:

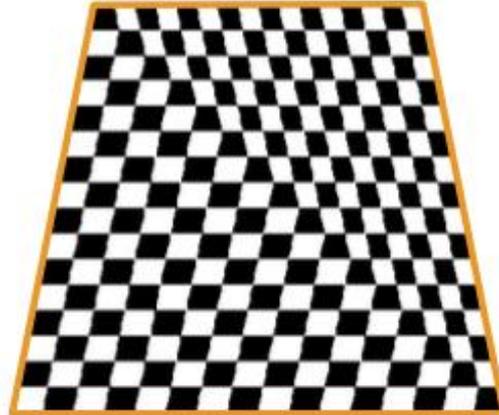


Uma interpolação linear nas coordenadas do mundo produz uma interpolação não linear nas coordenadas da tela!

# Projeção Perspectiva e Interpolação



Textura



Plano inclinado  
com uma projeção  
perspectiva

O que está  
errado?

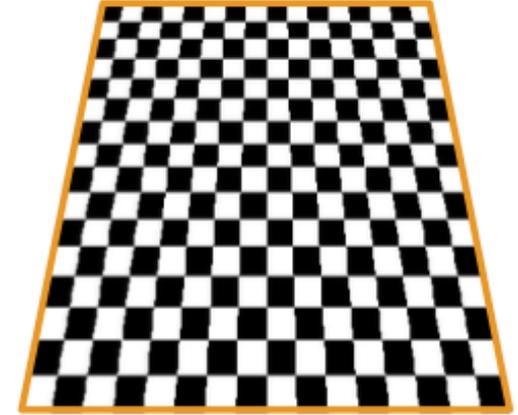
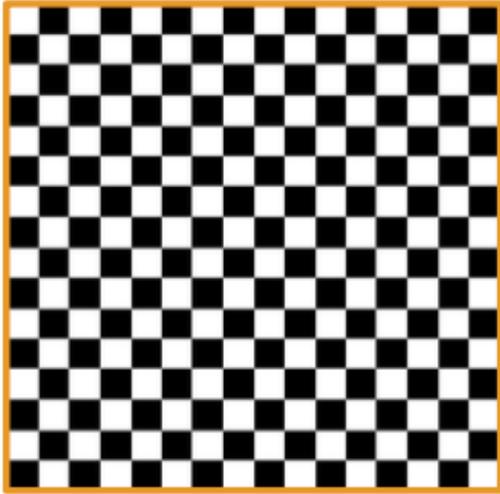
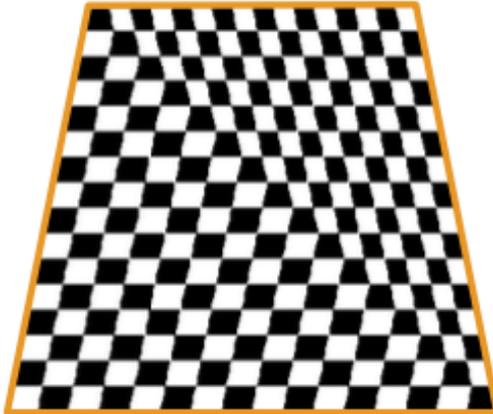


Imagem correta

# Projeção Perspectiva e Interpolação



Textura



**Interpolação  
baricêntrica de  
coordenadas de  
textura no espaço  
da tela (2D)**

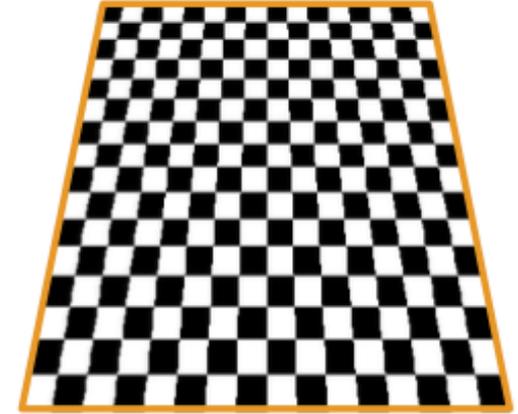
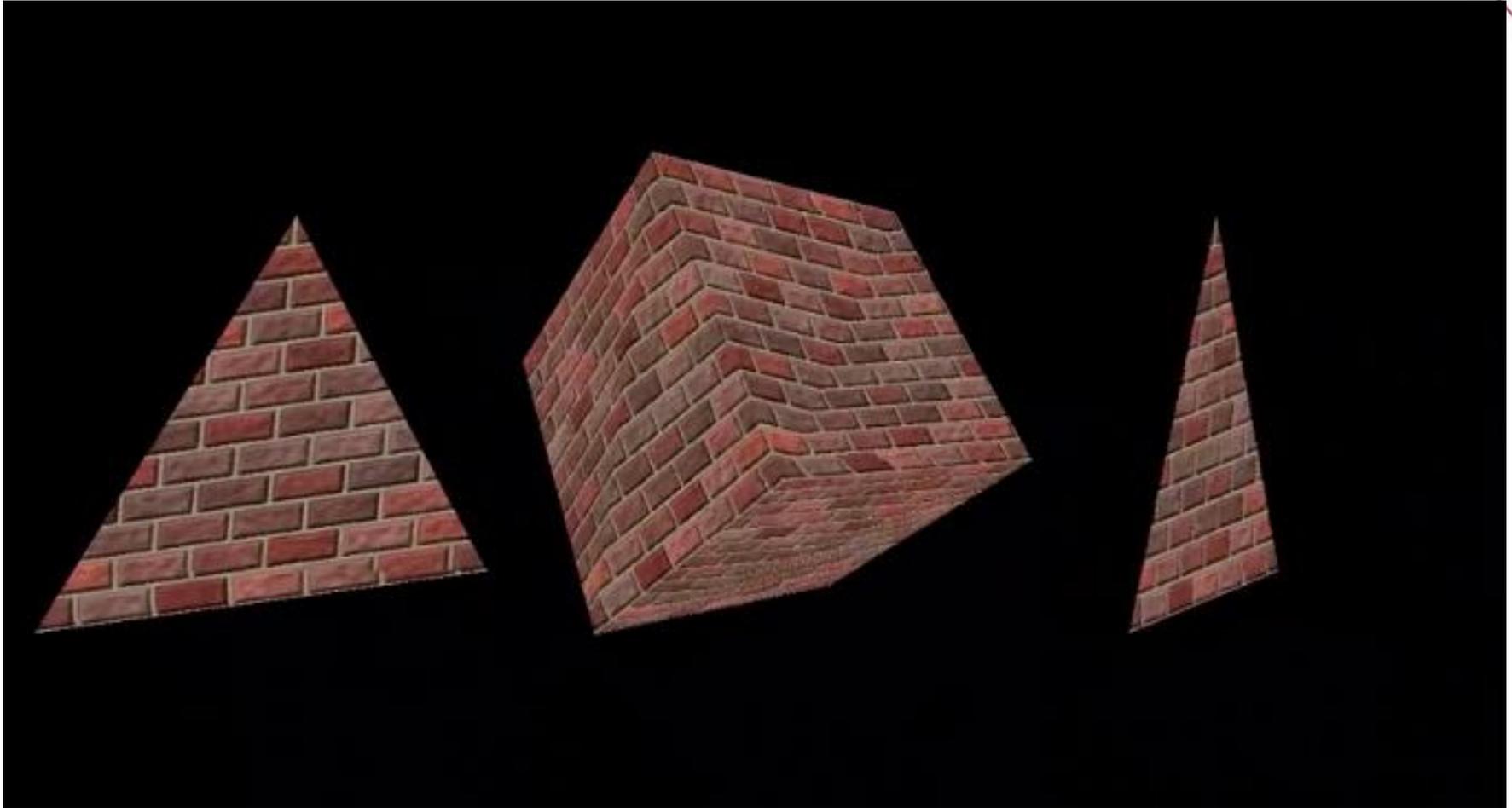


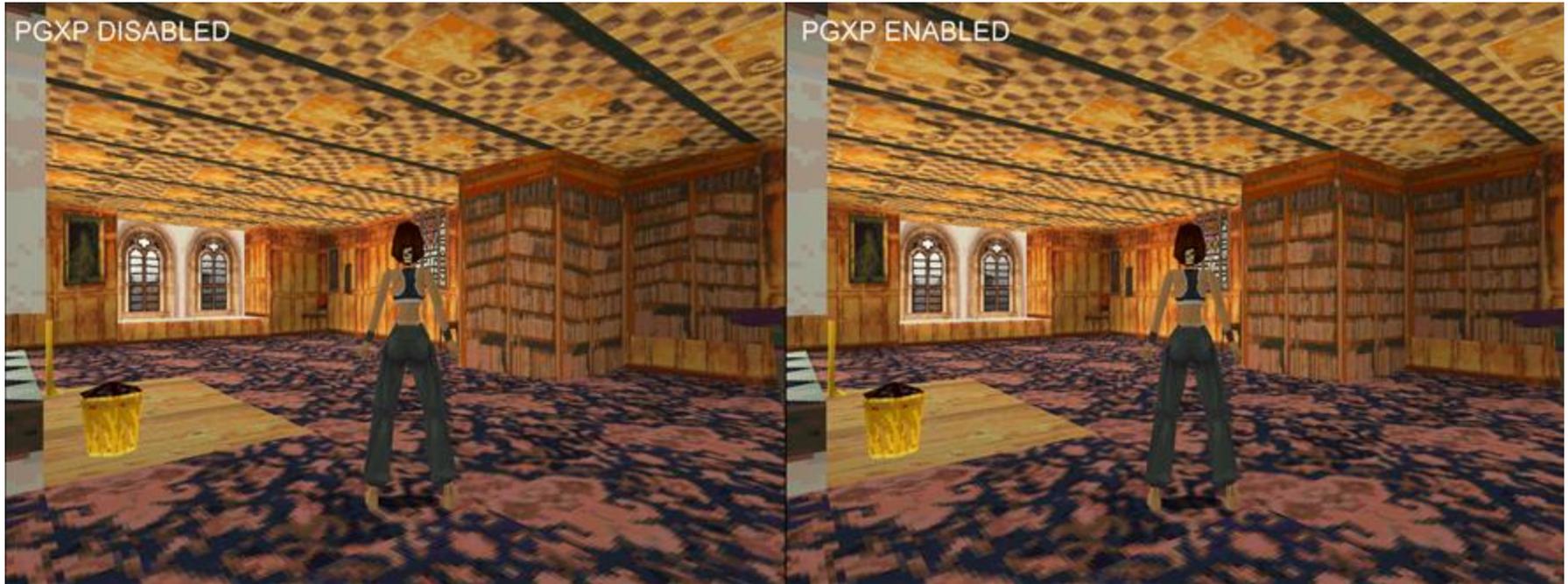
Imagem correta

# Mapeamento de texturas Afim



# PlayStation 1

O PS1 não tinha texturas corrigidas pela perspectiva. Hoje o PGXP (Parallel / Precision Geometry Transform Pipeline) é um aprimoramento para a emulação do PlayStation que produz geometrias 3D de alta precisão.



# Matriz de Transformação Perspectiva (Z)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{\text{near}}{\text{right}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\text{near}}{\text{top}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\text{far}+\text{near}}{\text{far}-\text{near}} & \frac{-2\text{far}\cdot\text{near}}{\text{far}-\text{near}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

para inverter sinal

$$Z' = Z \cdot \frac{\text{far} + \text{near}}{\text{near} - \text{far}} + \frac{2 \cdot \text{far} \cdot \text{near}}{\text{near} - \text{far}}$$

$$w' = -Z$$

$$Z_{\text{normalizado}} = \frac{Z'}{w'} = \frac{Z \cdot \frac{\text{far}+\text{near}}{\text{near}-\text{far}} + \frac{2 \cdot \text{far} \cdot \text{near}}{\text{near}-\text{far}}}{-Z}$$

$$Z_{\text{normalizado}} = \frac{\text{far} + \text{near}}{\text{near} - \text{far}} + \frac{2 \cdot \text{far} \cdot \text{near}}{\text{near} - \text{far}} \cdot \frac{1}{-Z}$$

# Matriz de Transformação Perspectiva (Z)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{\text{near}}{\text{right}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\text{near}}{\text{top}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\text{far}+\text{near}}{\text{far}-\text{near}} & \frac{-2\text{far}\cdot\text{near}}{\text{far}-\text{near}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

para inverter sinal

$$Z' = Z \cdot \frac{\text{far} + \text{near}}{\text{near} - \text{far}} + \frac{2 \cdot \text{far} \cdot \text{near}}{\text{near} - \text{far}}$$

$$w' = -Z$$

$$Z_{\text{normalizado}} = \frac{Z'}{w'} = \frac{Z \cdot \frac{\text{far}+\text{near}}{\text{near}-\text{far}} + \frac{2 \cdot \text{far} \cdot \text{near}}{\text{near}-\text{far}}}{-Z}$$

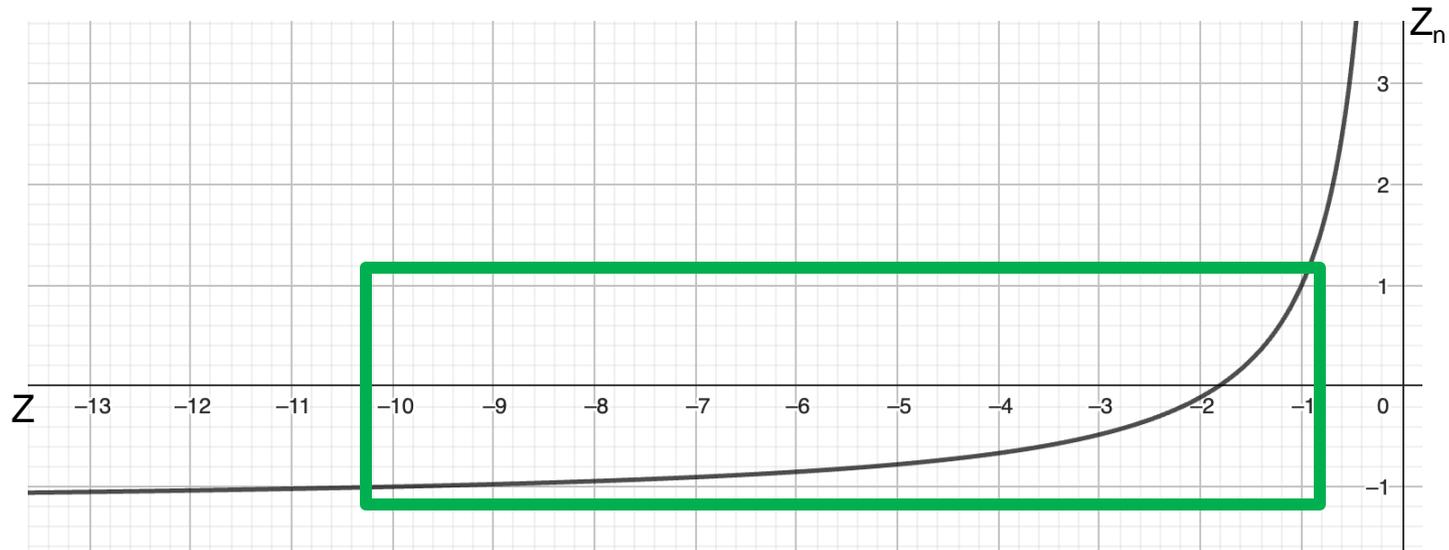
$$Z_{\text{normalizado}} = \frac{\text{far} + \text{near}}{\text{near} - \text{far}} + \frac{2 \cdot \text{far} \cdot \text{near}}{\text{near} - \text{far}} \cdot \frac{1}{-Z}$$

# Matriz de Transformação Perspectiva (Z)

$$Z_{\text{normalizado}} = \frac{\text{far} + \text{near}}{\text{near} - \text{far}} + \frac{2 \cdot \text{far} \cdot \text{near}}{\text{near} - \text{far}} \cdot \frac{1}{-Z}$$

Por exemplo: Se, near = 1 (-1) e far = 10 (-10)

$$Z_n = -\frac{11}{9} - \frac{20}{9 \cdot Z}$$



Isso é uma função racional que gera uma hipérbole

# Média Harmônica Ponderada para Profundidade

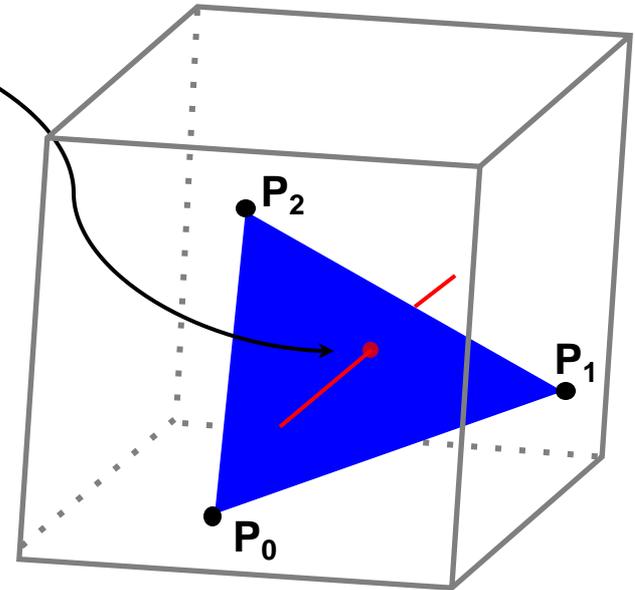
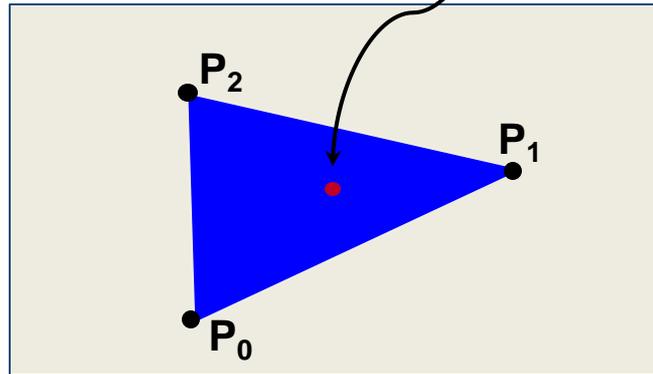
Assim, em vez de calcular a média de  $Z$  diretamente, utiliza-se  $1/Z$ , que é linear no espaço de projeção, e no final, inverte-se o valor para obter a profundidade correta.

$$\frac{1}{Z_{\text{interpolado}}} = \lambda_1 \frac{1}{Z_1} + \lambda_2 \frac{1}{Z_2} + \lambda_3 \frac{1}{Z_3}$$

# Calculando o Z no interior do triângulo

Assim, usamos o Z dos vértices no espaço da câmera, para calcular o Z de onde estamos amostrando, através da média harmônica ponderada, com os pesos alfa, beta e gama.

$$Z = \frac{1}{\alpha \frac{1}{Z_0} + \beta \frac{1}{Z_1} + \gamma \frac{1}{Z_2}}$$



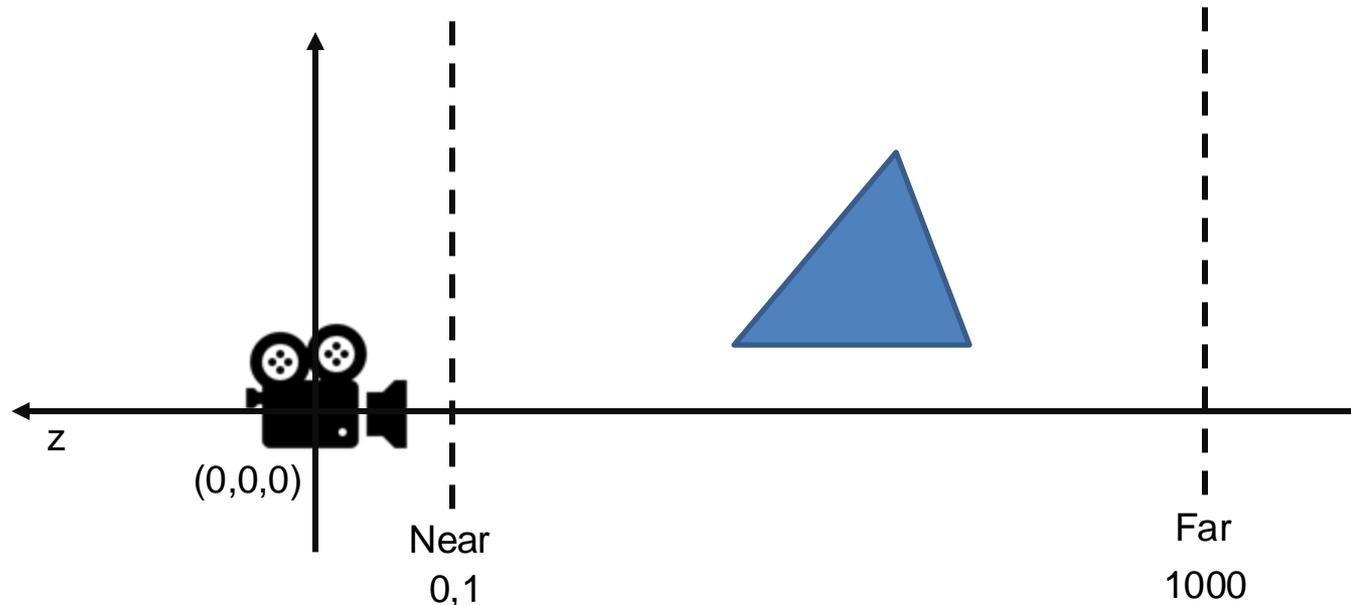
# Média Harmônica Ponderada

Faça os cálculos com os valores de Z no espaço da câmera (view)  
não use NDC

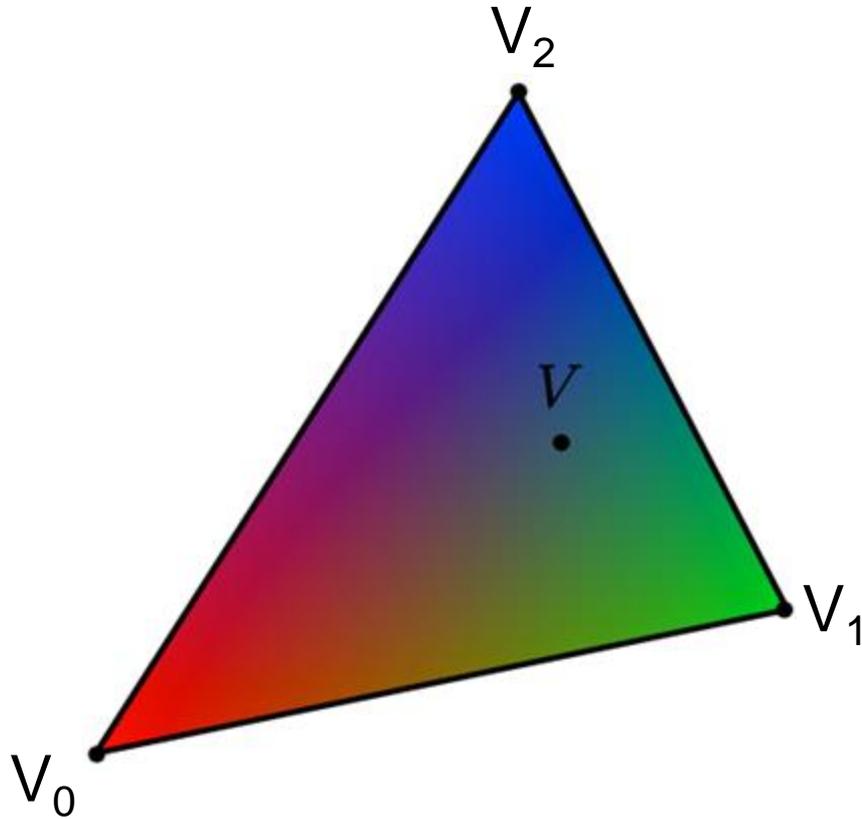
Use os valores positivos (inverta o sinal da coordenada Z)

Isso garante que não terá maiores deformações.

E que sempre os valores serão maiores que zero.



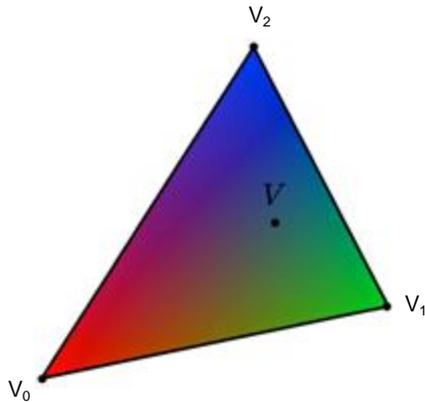
# Interpolação não linear em $Z$ pelo Triângulo



$$V = ?$$

# Estratégia, usar o Z para calcular os valores

Usar agora o Z dividindo o parâmetro que se deseja interpolar. E depois multiplica o Z do ponto sendo amostrado.



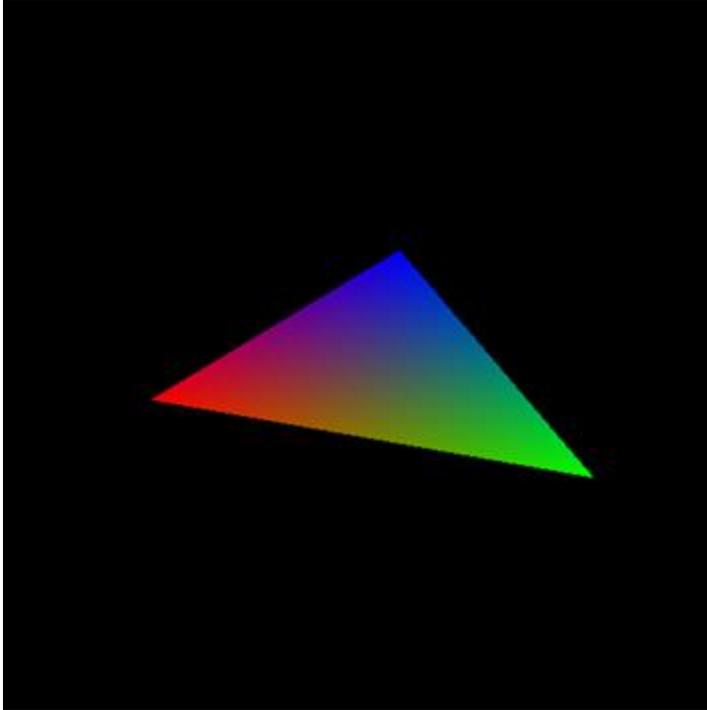
$$V = Z \cdot \left( \alpha \frac{V_0}{Z_0} + \beta \frac{V_1}{Z_1} + \gamma \frac{V_2}{Z_2} \right)$$

As coordenadas baricêntricas no espaço da tela não são transformações afim. Já se forem interpoladas com a divisão do valor de Z são transformações afim.

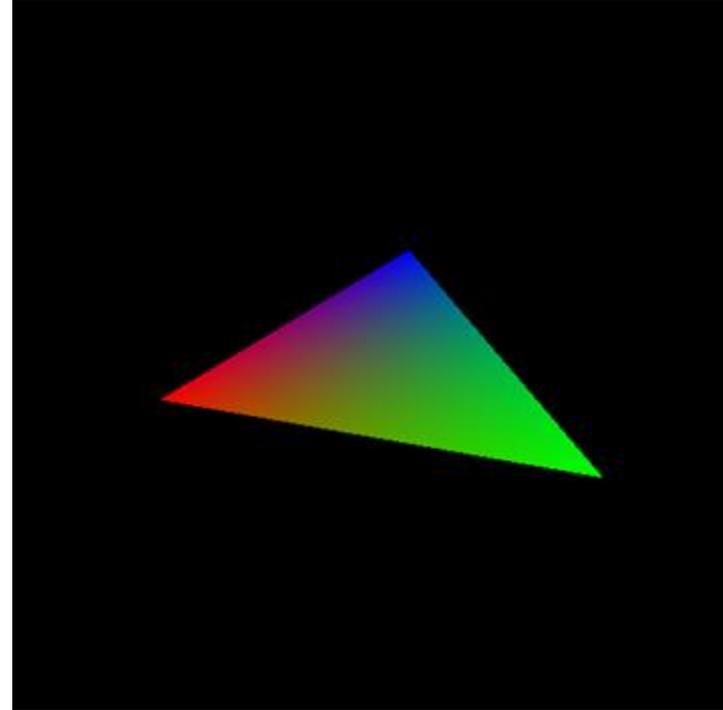
**Cuidado: o Z a ser usado é do espaço da câmera, não use o Z do NDC!**

# Diferença no resultado quando usada o Z

Interpolação Baricêntrica 2D



Interpolação Baricêntrica 3D



Mais informações em: <https://www.scratchapixel.com/lessons/3d-basic-rendering/rasterization-practical-implementation/visibility-problem-depth-buffer-depth-interpolation.html>

# ATIVIDADE:

Acesse o notebook no site da disciplina.

Crie uma cópia para você e realize todos os exercícios.

Voltamos em 30 minutos?

# Computação Gráfica

Luciano Soares

<lpsoares@insper.edu.br>

Fabio Orfali

<fabio01@insper.edu.br>