Computação Gráfica

Aula 5: Sistema de Coordenadas

Antes de Começarmos

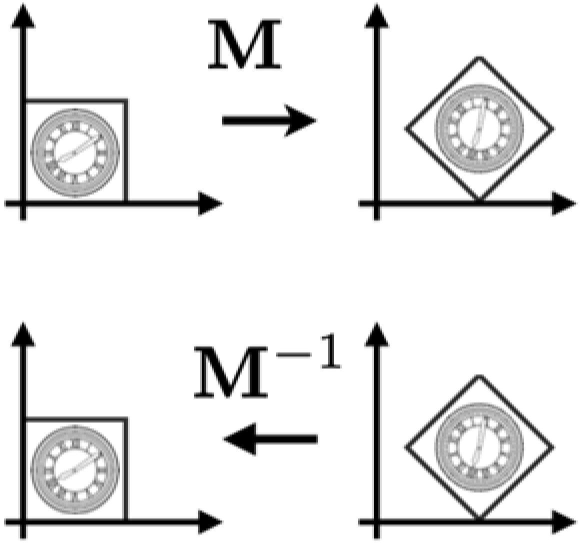
Conceitos matemáticos da aula de hoje:

- Matriz Inversa
- Mudança de Base / Mudança de Sistema de Coordenadas

Transformações Inversas

$$M^{-1}$$

M^{-1} é a transformada inversa de M, tanto no sentido algébrico, como geométrico.



Insper

Transformações Inversas

Se M é a matriz de uma transformação linear, então a matriz de sua transformação inversa é M^{-1} (matriz inversa de M).

Lembre que

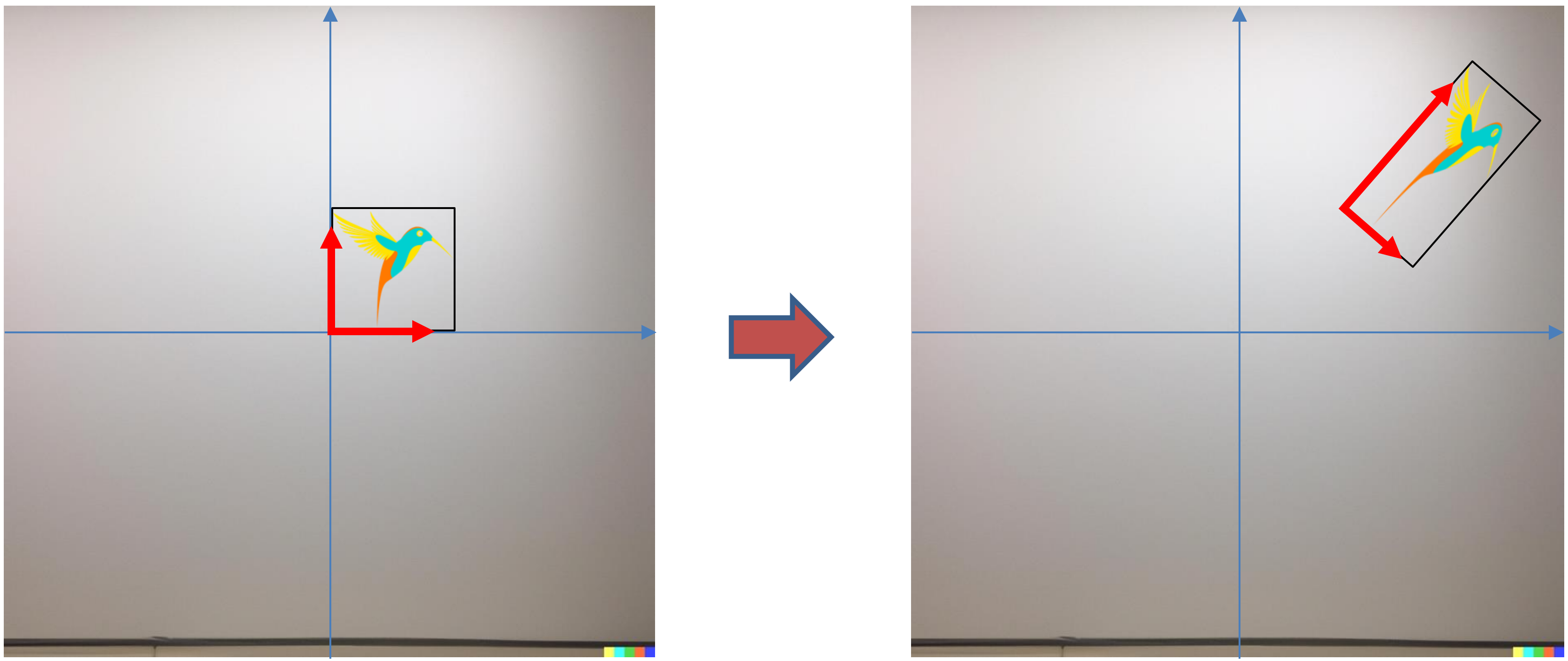
$$M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = I$$

sendo

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo para pensar

Quero pegar esse adesivo e reposicionar ele em outra forma e local da minha parede.



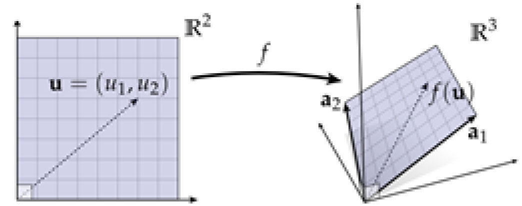
Podemos pensar nisso como uma mudança de sistema de coordenadas = mudança da base + mudança do origem do sistema

Insper

Mudança de Base

Eventualmente, podemos realizar mudanças do plano para o espaço:

$$f(\mathbf{u}) = u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2$$



Neste caso u1 e u2 são coordenadas (2D) e a1 e a2 vetores 3D

Os vetores da transformação podem ser codificados numa matriz

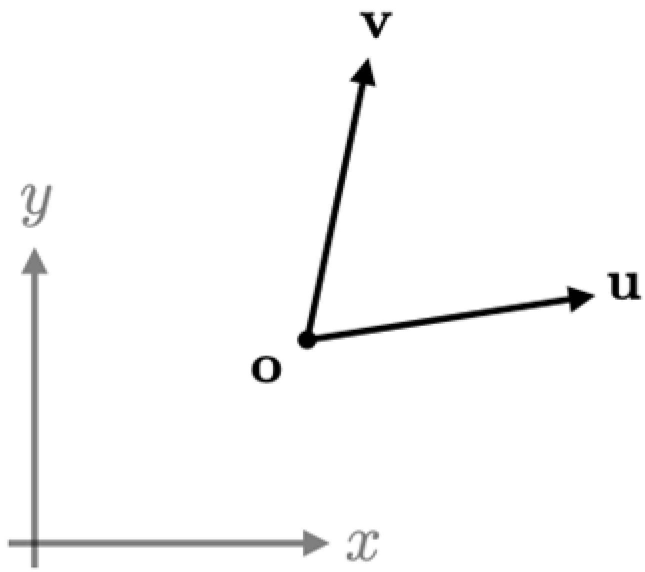
$$A := \begin{bmatrix} a_{1,x} & a_{2,x} \\ a_{1,y} & a_{2,y} \\ a_{1,z} & a_{2,z} \end{bmatrix}$$

Uma multiplicação de matrizes vai realizar o cálculo desejado

$$\begin{bmatrix} a_{1,x} & a_{2,x} \\ a_{1,y} & a_{2,y} \\ a_{1,z} & a_{2,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,x}u_1 + a_{2,x}u_2 \\ a_{1,y}u_1 + a_{2,y}u_2 \\ a_{1,z}u_1 + a_{2,x}u_2 \end{bmatrix} = u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2$$

Sistema de Coordenadas

Um novo sistema de coordenadas é definido por uma origem (ponto) e um conjunto de eixos (vetores). Em geral usamos vetores unitários para definir o sistema de coordenadas.

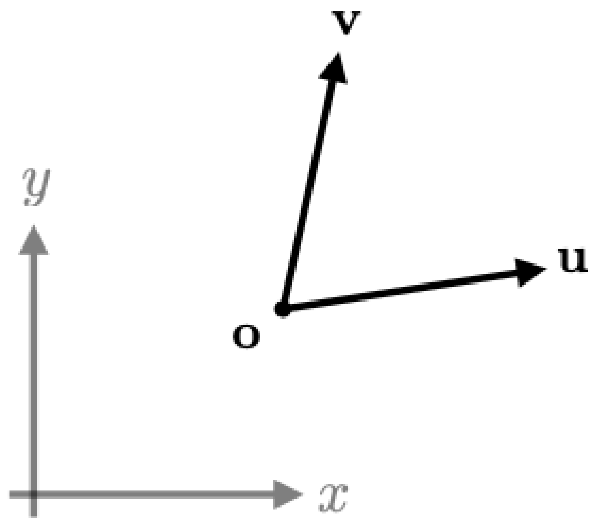


Dadas as coordenadas no sistema de referência (o, u, v), qual é a transformação para as coordenadas em (x, y)?

Insper

Matriz de mudança de sistema de coordenadas

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{o} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & o_x \\ u_y & v_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



As colunas da matriz são definidas pelo sistema de referência nas coordenadas no mundo.

Insper

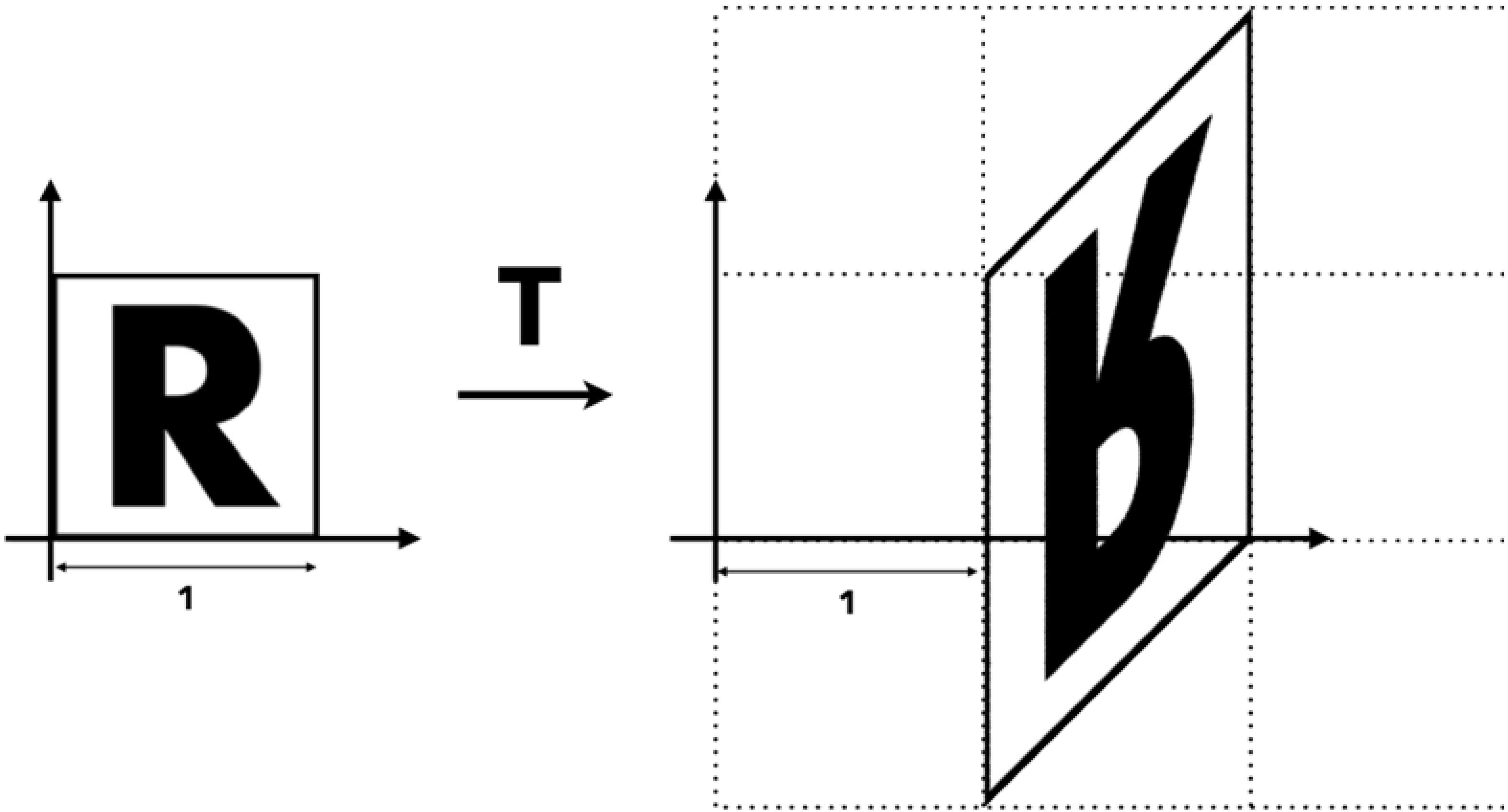
Mudança de sistema de coordenadas 3D

A mudança do sistema de coordenadas para 3D é realizada com uma matriz 4x4.

$$f(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathrm{o}) = \begin{bmatrix} \mathrm{u} & \mathrm{v} & \mathrm{w} & \mathrm{o} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{u}_x & \mathrm{v}_x & \mathrm{w}_x & \mathrm{o}_x \\ \mathrm{u}_y & \mathrm{v}_y & \mathrm{w}_y & \mathrm{o}_y \\ \mathrm{u}_z & \mathrm{v}_z & \mathrm{w}_z & \mathrm{o}_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

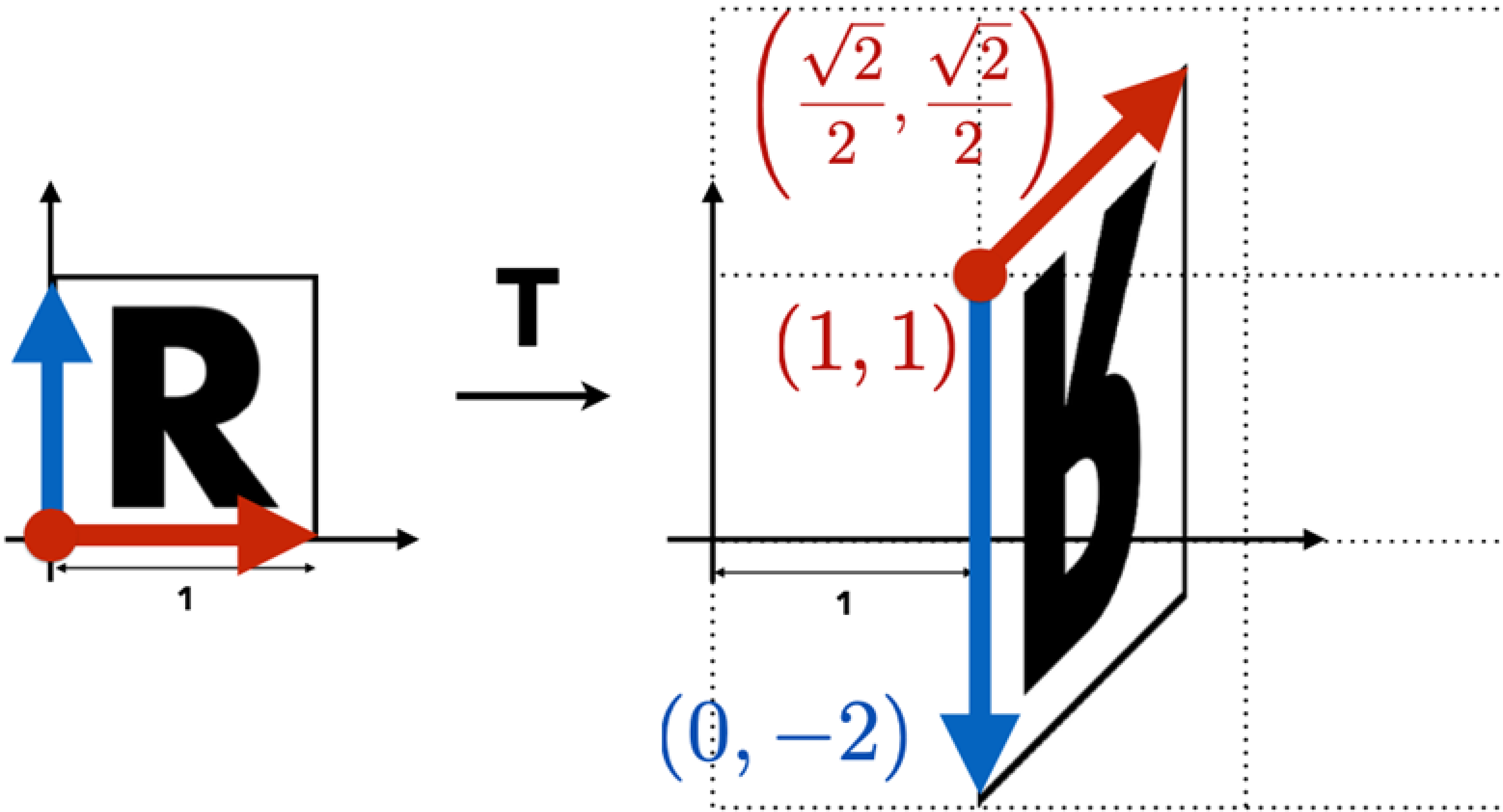
Sistema de Coordenadas : Exemplo

Escreva uma matriz T representando essa transformação:



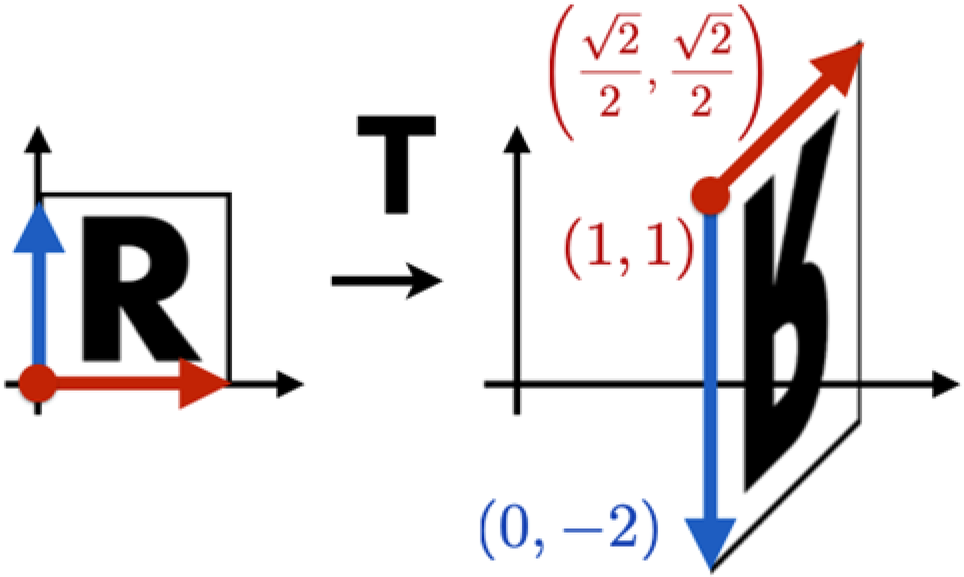
Sistema de Coordenadas : Exemplo

Escreva uma matriz T representando essa transformação:



Sistema de Coordenadas : Exemplo

Escreva uma matriz T representando essa transformação:

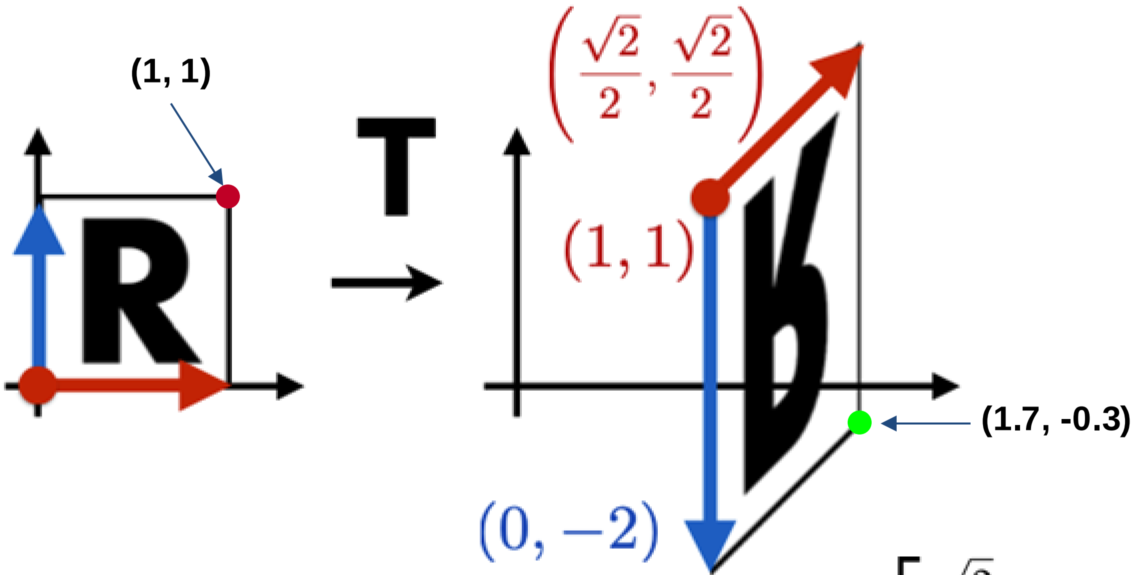


$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{o} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Insper

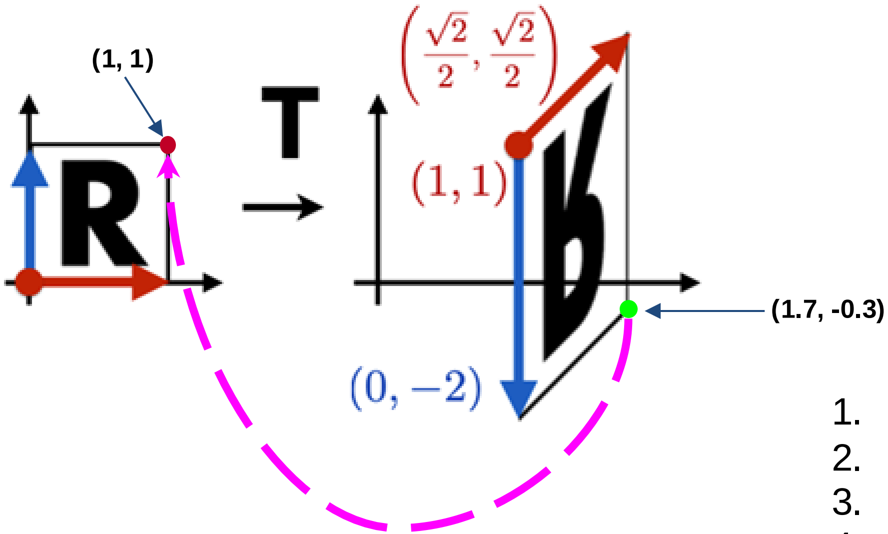
Sistema de Coordenadas : Exemplo



Vamos testar com o ponto (1,1).

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sistema de Coordenadas : Exemplo



E se quisermos fazer o Inverso?

Matriz Inversa

1. Calcule a determinante da matriz.
2. Transponha a matriz original.
3. Calcule o determinante de cada sub matriz.
4. Crie a matriz de cofatores.
5. Divida cada termo da matriz adjunta pela determinante.

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

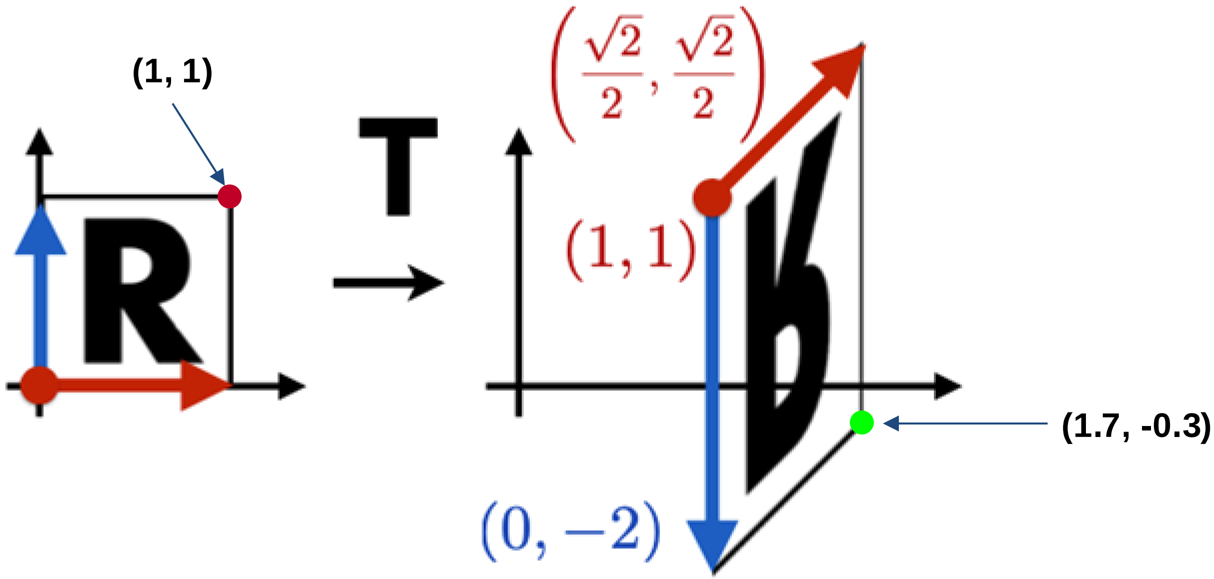
Insper

Sistema de Coordenadas : Exemplo

Vamos testar:

$$\mathrm{M} \cdot \mathrm{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

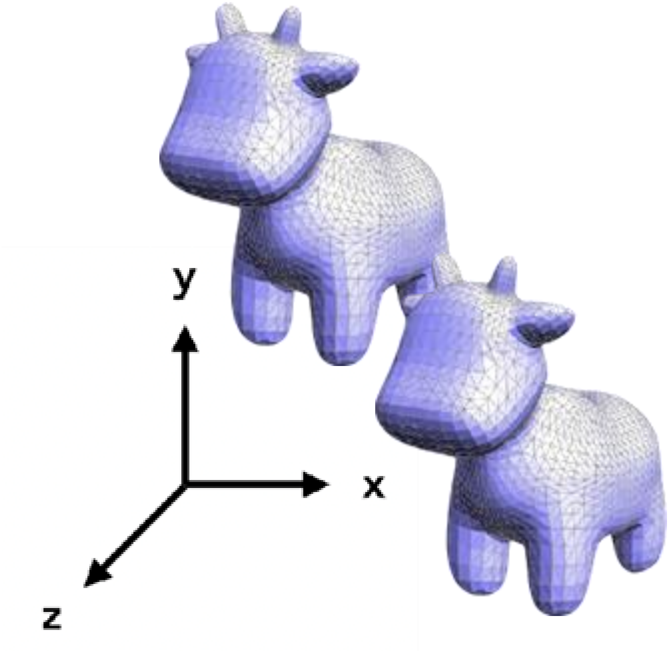
Sistema de Coordenadas : Exemplo



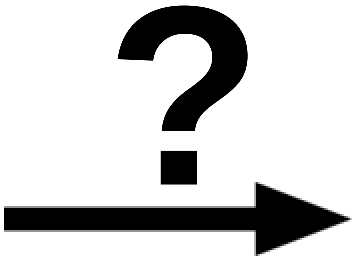
$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

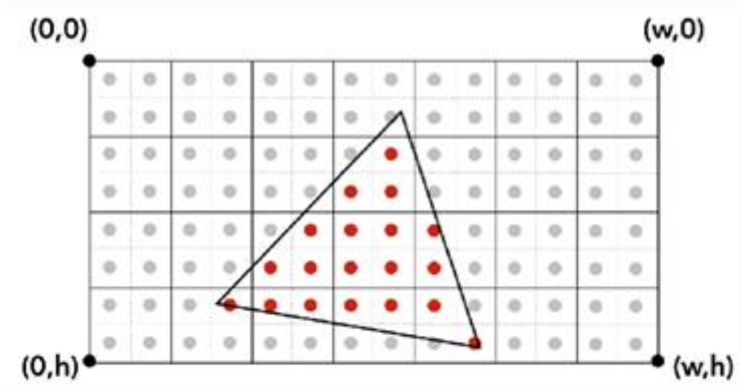
Do espaço do mundo para o espaço da câmera (View)

Transformações para Visualização e Perspectiva



Modelando a cena em coordenadas do mundo 3D *(world Space)*





Rasterização em coordenadas da tela em 2D *(Screen Space)*

Espaço de Coordenadas da Câmera (View)

Usaremos esta convenção para o sistema de coordenadas padrão de câmera:

- câmera localizada na origem
- olhando pelo eixo z negativo
- o vetor vertical é o eixo y
- eixo x
  - ortogonal a y e z
  - apontando para direita

Espaço de Coordenadas da Câmera (View)

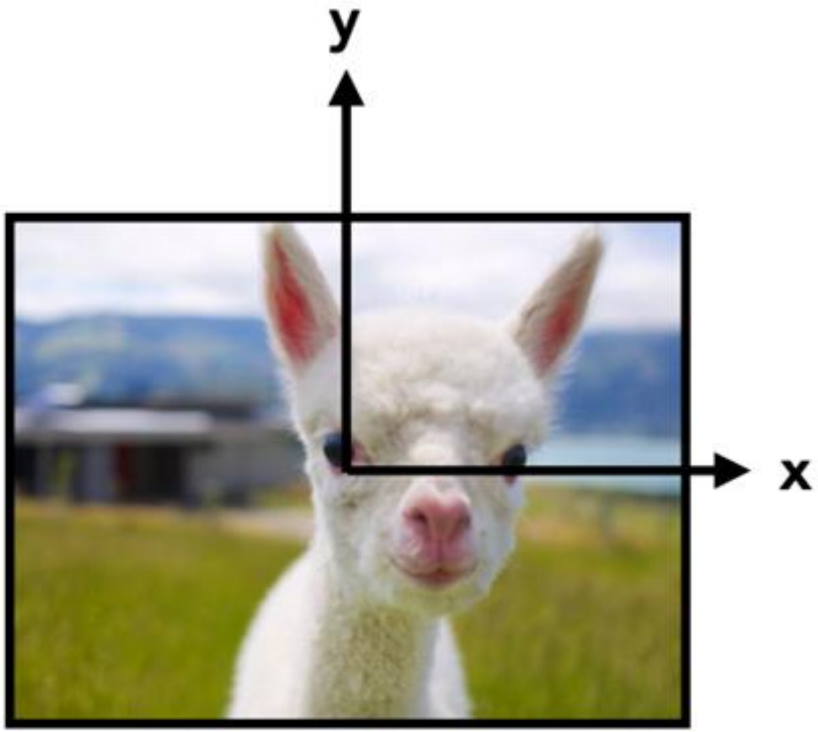


Imagem Resultante
(eixo z como se estivesse saindo da tela)

Considere uma câmera apontando para o mundo

Considere uma câmera apontando para o mundo

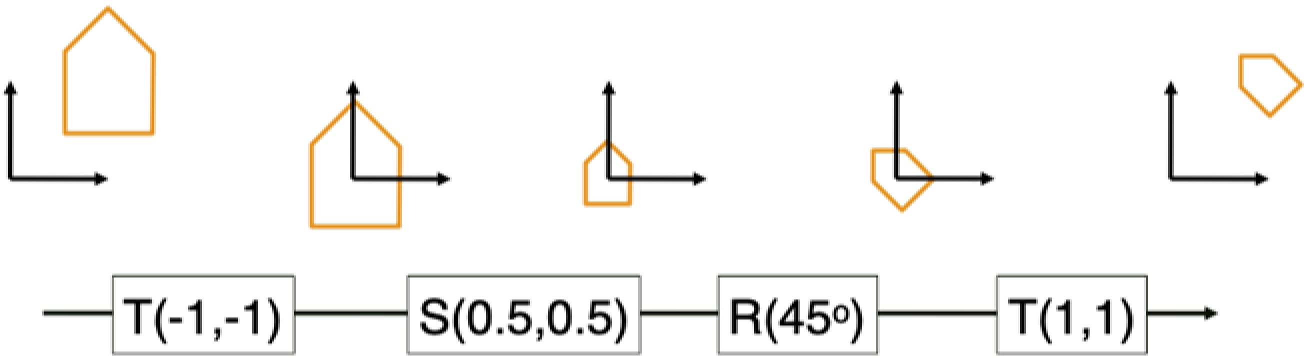
Função LookAt:

- **Entrada**: at, up, eye : fornecidos em coordenadas do espaço do mundo (3D)
- **Saída**: matriz de transformação do espaço do mundo para o espaço da câmera

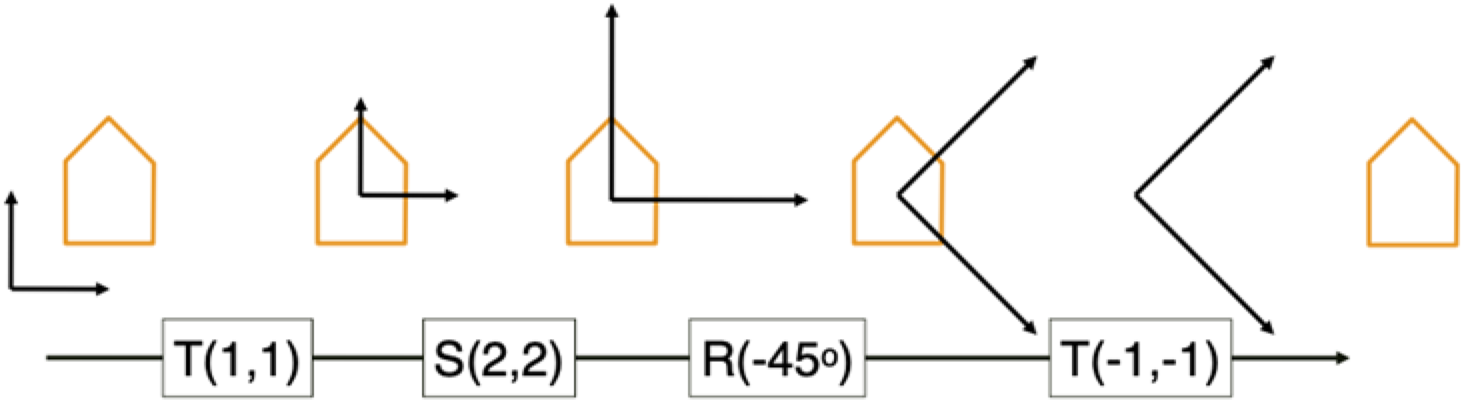
Insper

Duas interpretações para uma transformação

Interpretação 1: transforme os pontos de objeto



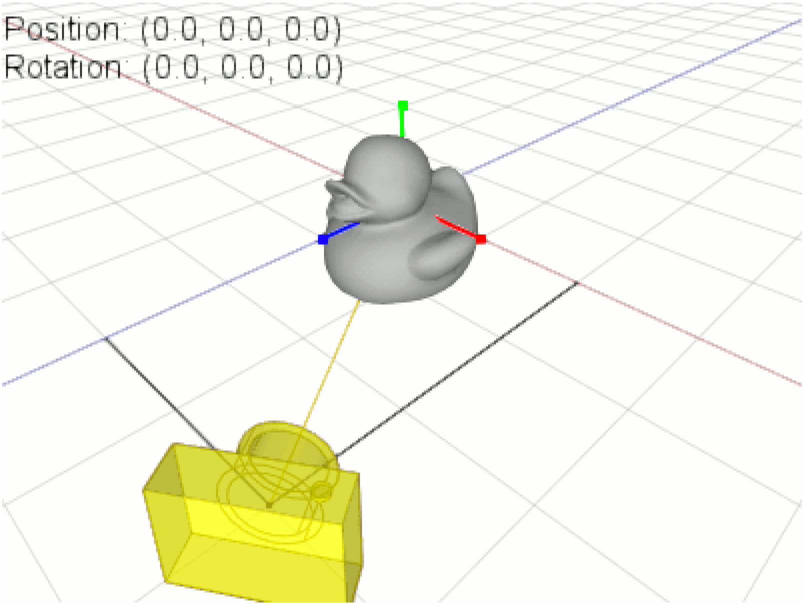
Interpretação 2: transforme o sistema de coordenadas



Insper

Função "LookAt"

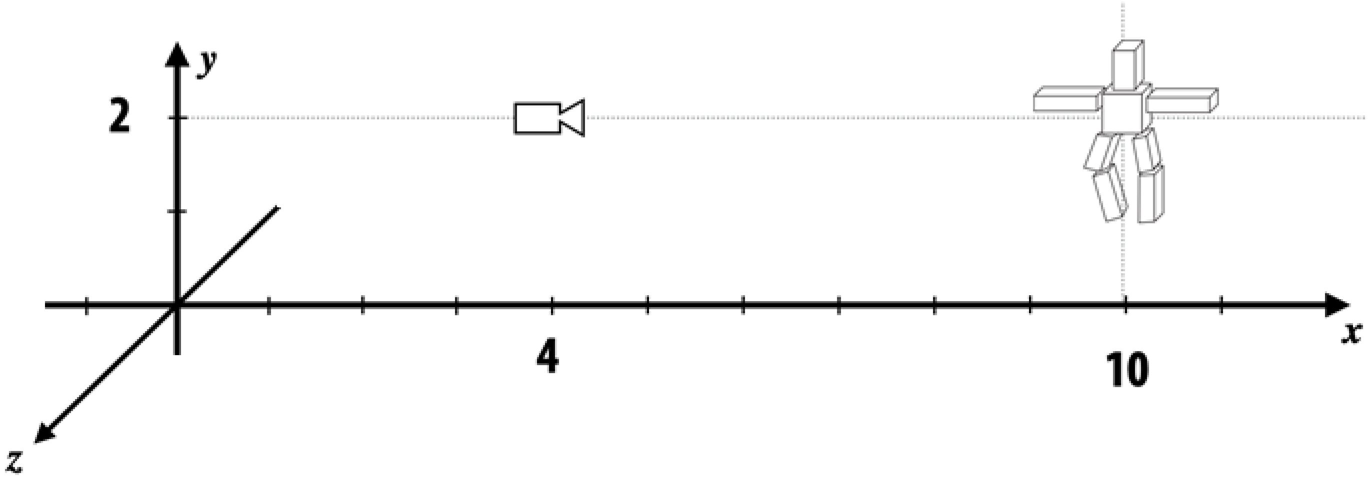
A função LookAt cria uma matriz de visualização (LookAt Matrix) que transforma vértices do espaço do mundo para o espaço da câmera (View).



http://www.songho.ca/opengl/gl_camera.html

Exemplo: Transformação Simples de Câmera

Considere um objeto posicionado no mundo.
Considere a câmera na posição (4, 2, 0), olhando pelo eixo X.



Quais transformações no sistema de coordenadas são necessárias para colocar a câmera na origem vendo pelo eixo –Z?

- Transladar os vértices do objeto por (-4, -2, 0), para fazer a câmera na origem.
- Rotacionar os vértices do objeto por pi/2 no eixo Y, para fazer a câmera olhar por –Z.

* A conveniência de fazer essa mudança de sistema de coordenadas ficará logo clara!

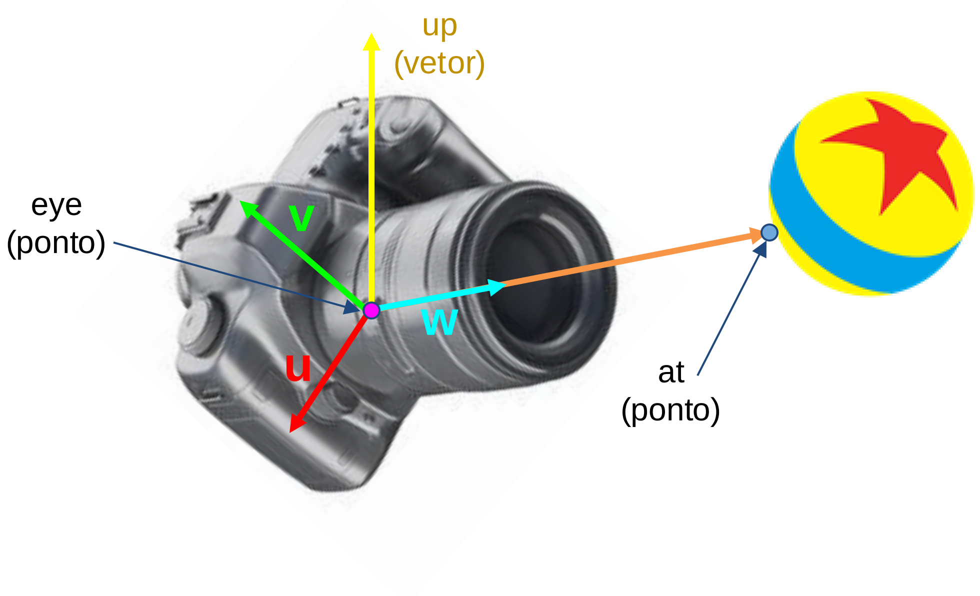
Insper

Identificando coordenadas ortonormais

$$w = \frac{\text{at - eye}}{|\text{at - eye}|}$$

$$u = \frac{w \times \text{up}}{|w \times \text{up}|}$$

$$v = \frac{u \times w}{|u \times w|}$$

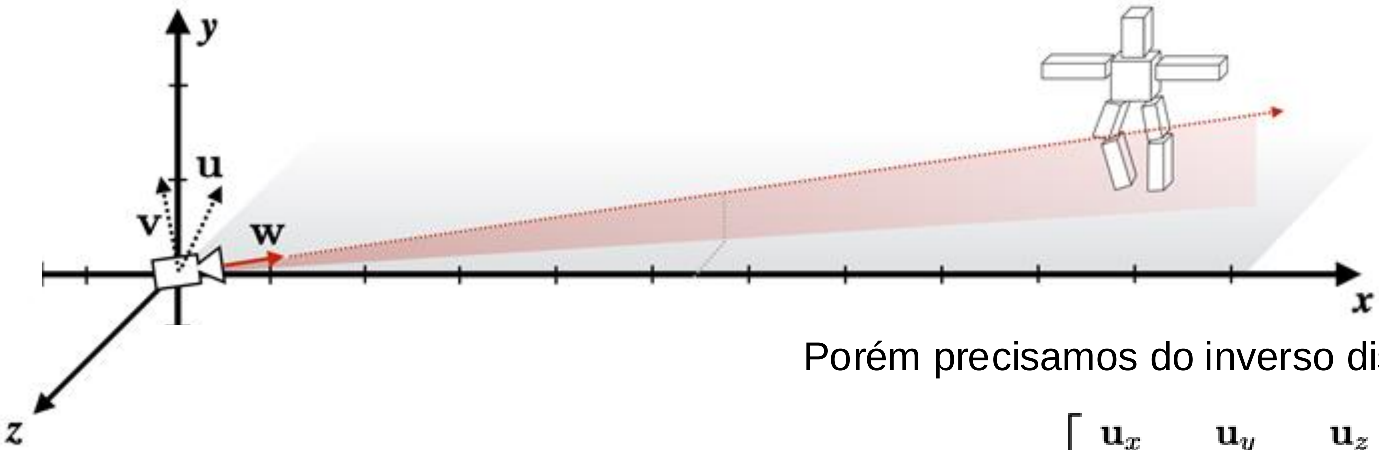


X é o produto vetorial

Câmera olhando para uma direção qualquer

Considere a câmera na origem olhando para uma direção w.

Qual transformação no sistema de coordenadas que rotaciona a câmera para estar olhando pelo eixo –Z?



Use uma base ortonormal para o W

A matriz de rotação R, mapeia o eixo x para u, o eixo y para v e o eixo z para -w

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{v}_x & -\mathbf{w}_x \\ \mathbf{u}_y & \mathbf{v}_y & -\mathbf{w}_y \\ \mathbf{u}_z & \mathbf{v}_z & -\mathbf{w}_z \end{bmatrix}$$

Porém precisamos do inverso disso:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \mathbf{v}_x & \mathbf{v}_y & \mathbf{v}_z \\ -\mathbf{w}_x & -\mathbf{w}_y & -\mathbf{w}_z \end{bmatrix}$$

Isso é mesmo a matriz inversa?

$$\mathbf{R}^T\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} & -\mathbf{w}\cdot\mathbf{u} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{R}^T\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} & -\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{R}^T\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} & -\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$$

Transformação de "Look-At"

A matriz do espaço da câmera para o espaço do mundo é uma mudança do sistema de coordenadas para o espaço (u, v, -w, e)

$$\begin{bmatrix} u_x & v_x & -w_x & e_x \\ u_y & v_y & -w_y & e_y \\ u_z & v_z & -w_z & e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A transformação de “look-at” é o inverso da matriz acima:

$$\begin{bmatrix} u_x & v_x & -w_x & e_x \\ u_y & v_y & -w_y & e_y \\ u_z & v_z & -w_z & e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ -w_x & -w_y & -w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e_x \\ 0 & 1 & 0 & -e_y \\ 0 & 0 & 1 & -e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Concluindo a Matriz Look At

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ -w_x & -w_y & -w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e_x \\ 0 & 1 & 0 & -e_y \\ 0 & 0 & 1 & -e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & -u_x e_x - u_y e_y - u_z e_z \\ v_x & v_y & v_z & -v_x e_x - v_y e_y - v_z e_z \\ -w_x & -w_y & -w_z & w_x e_x + w_y e_y + w_z e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & -u \cdot e \\ v_x & v_y & v_z & -v \cdot e \\ -w_x & -w_y & -w_z & w \cdot e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Inversa de Bases Ortogonais

2 Matrizes ortogonais

Dada uma matriz quadrada M sua *transposta*, denotada M^t, é uma matriz cujas linhas são as colunas de M, ou seja, se $M = (a_{i,j})$ e $M^t = (b_{i,j})$ se verifica $b_{j,i} = a_{i,j}$.

Definição 1 (Matriz ortogonal). *Uma matriz M é* ortogonal *se é inversível e $M^{-1} = M^t$, ou seja,*

$$MM^t = M^tM = Id.$$

Observe que se M é ortogonal então sua transposta também é ortogonal (veja que $(M^t)^{-1} = M$). Portanto, a inversa de uma matriz ortogonal também é ortogonal.

Propriedade 2.1. *Uma matriz ortogonal é uma matriz cujas colunas (ou linhas) formam uma base ortonormal (de fato, isto é uma definição geométrica alternativa de matriz ortogonal).*

Prova: Para simplificar a notação veremos a afirmação para matrizes 2×2. Seja M uma matriz ortogonal cujos vetores coluna são $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$.

$$Id = M^tM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,a + b\,b & a\,c + b\,d \\ a\,c + b\,d & c\,c + d\,d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$u \cdot u = v \cdot v = 1, \quad u \cdot v = 0,$$

e u e v formam uma base ortonormal. □

De fato, o argumento anterior mostra o seguinte:

Propriedade 2.2. *Uma matriz é ortogonal se, e somente se, seus vetores coluna formam uma base ortonormal.*

Multiplicando MM^t, v. obterá a mesma afirmação para os vetores linha:

Propriedade 2.3. *Uma matriz é ortogonal se, e somente se, seus vetores linha formam uma base ortonormal.*

Observação 1. *O fato anterior implica que a matriz de uma rotação ou de um espelhamento (na base canônica) é uma matriz ortogonal. Também implica que a matriz de uma projeção não é ortogonal (em nenhuma base).*

Para matrizes ortonormais a Inversa é a matriz transposta ($T^{-1}= T^{T}$).

Fonte: http://www.mat.puc-rio.br/cursos/MAT1200/roteiros//aula21b.pdf

Insper

Inversas do produto de duas matrizes

A inversa do produto de A por B é igual ao produto das matrizes inversa de B pela inversa de A

$$(T \cdot R)^{-1} = R^{-1} \cdot T^{-1}$$

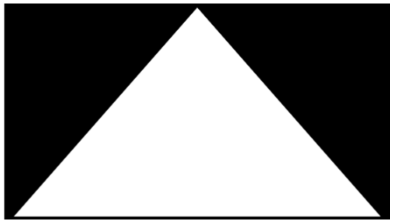
ATIVIDADE: Sistema de Coordenadas

Acesse o documento

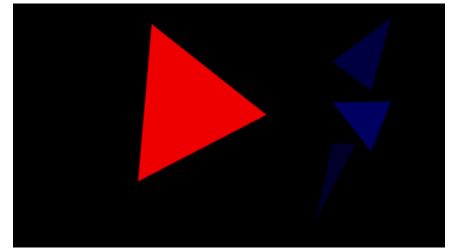
Realize todos os exercícios.

Voltamos em 30 minutos?

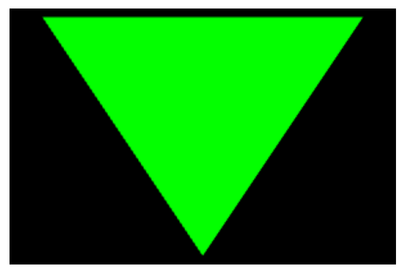
Segunda parte do projeto 1



um_triangulo.x3d



triang3d.x3d



zoom.x3d

https://lpsoares.github.io/Renderizador/

Insper

Computação Gráfica

Luciano Soares
<lpsoares@insper.edu.br>

Fabio Orfali
<fabioO1@insper.edu.br>