Computação Gráfica

Aula 4: Coordenadas Homogêneas e Quaternions

Retomando da última aula:

Coordenadas Homogêneas (em 2D)

Coordenadas Homogêneas (em 2D)

Adicionar mais uma coordenada (coordenada w)

Ponto 2D : $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 1)^T$

Vetor 2D : $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0)^T$

A matriz para translação então fica:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas (2D)

Ideia: representa pontos 2D com 3 valores (coordenadas homogêneas)

Podemos usar a descrição 2D-H para coordenadas homogêneas em 2D

Logo as transformações são representadas por matrizes 3x3

Para se recuperar as coordenadas 2D de um ponto, basta dividir por w

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x/w \\ y/w \end{bmatrix}$$

Insper

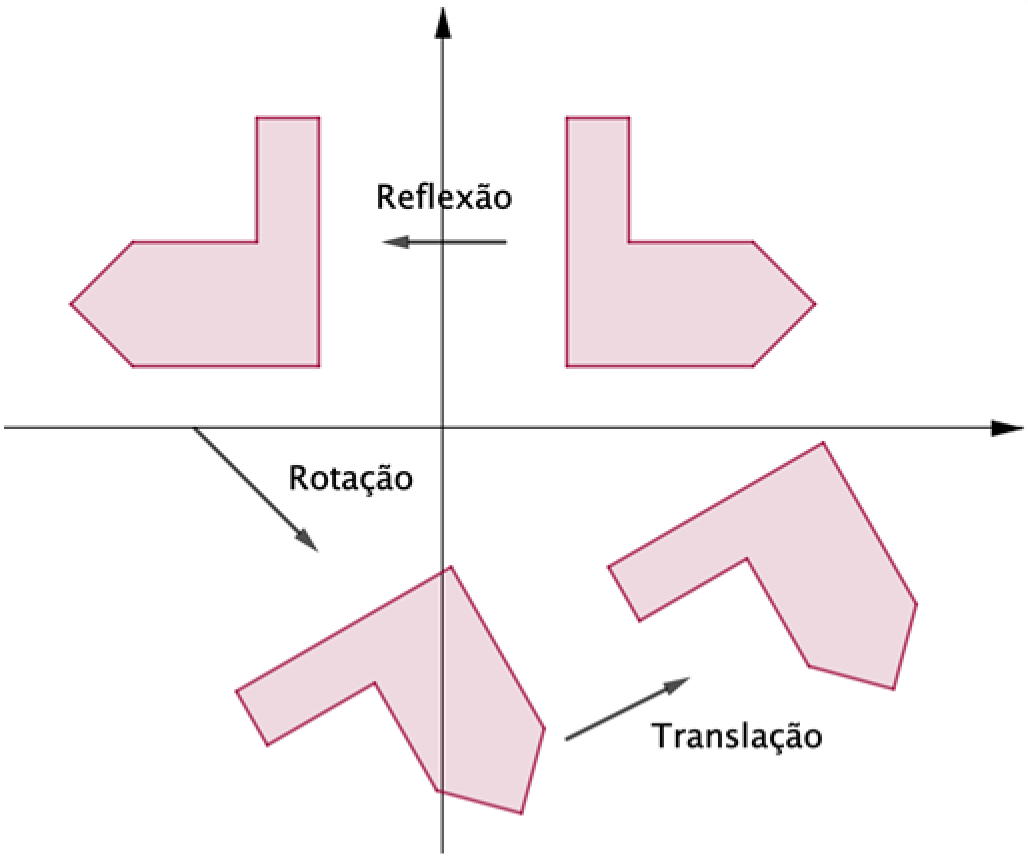
Propriedades das Coordenadas Homogêneas

Operações em coordenadas homogêneas:
(válidas se a coordenada w do resultado for 1 ou 0)

vetor	**+ vetor**	**= vetor**
ponto	**– ponto**	**= vetor**
ponto	**+ vetor**	**= ponto**
ponto	**+ ponto**	**= ??**

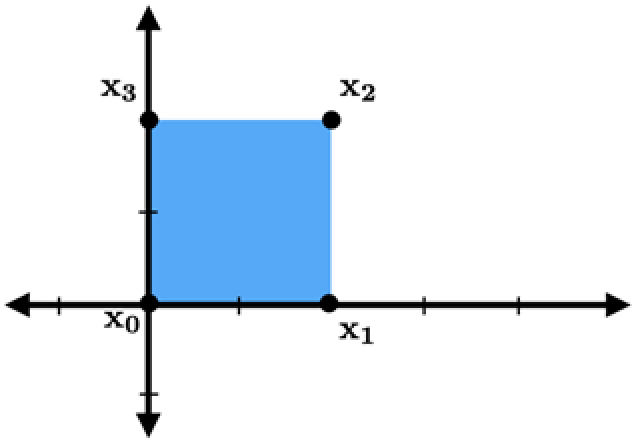
Composição de Transformações

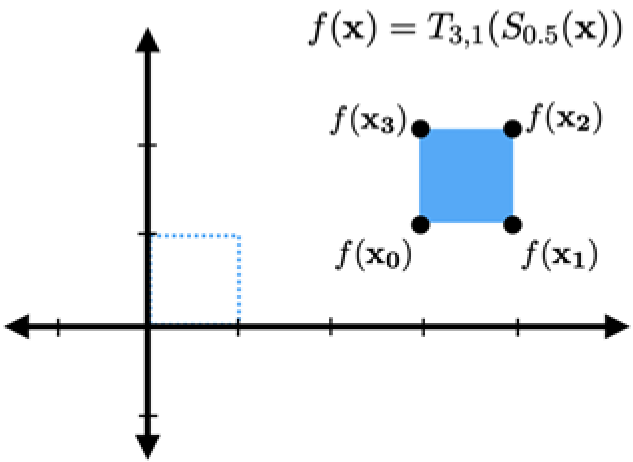
É possível fazer a composição de transformações mais básicas para conseguir transformações mais complexas.

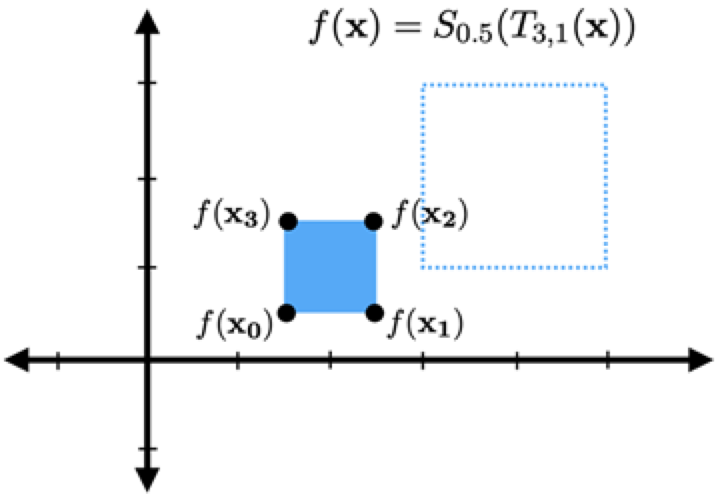


Insper

Composição de Transformações







Observação: a ordem em que as transformações são aplicadas importa!

- superior-direito: escala e translada
- inferior-direito: translada e escala

Composição de Transformações

As matrizes podem nos ajudar a compor transformações?

$$Rotação\ de\ \frac{\pi}{2}\ rad\ anti-horário:$$

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Reflexão\ no\ eixo\ x:$$

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

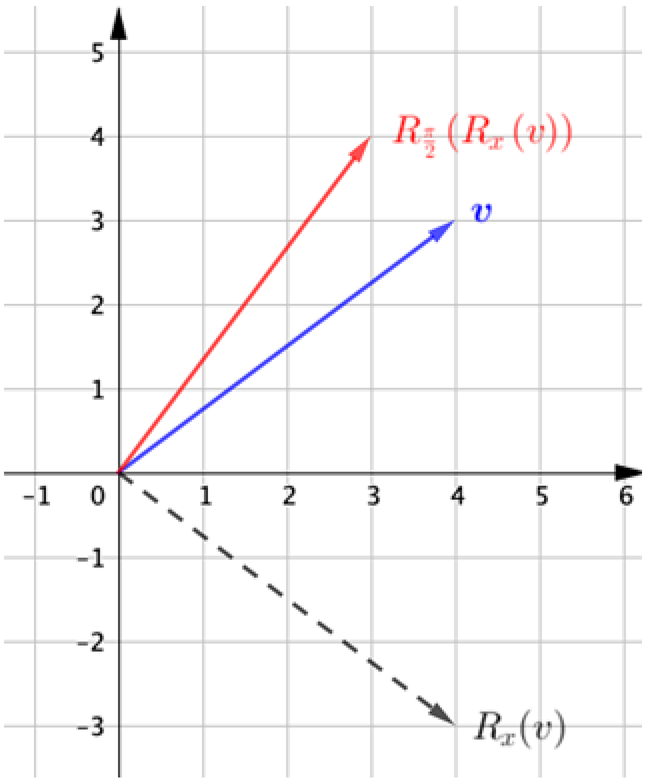
$$R_{\pi/2} \times R_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Composição de Transformações

$$R_{\pi/2} \times R_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$



Primeiro reflete em x e, depois, rotaciona pi/2.

A composição obtida aplicando a transformação A seguida da B é indicada por:

$$B \circ A = B(A(v))$$

A matriz dessa composição é:

$$M_B \times M_A$$

Insper

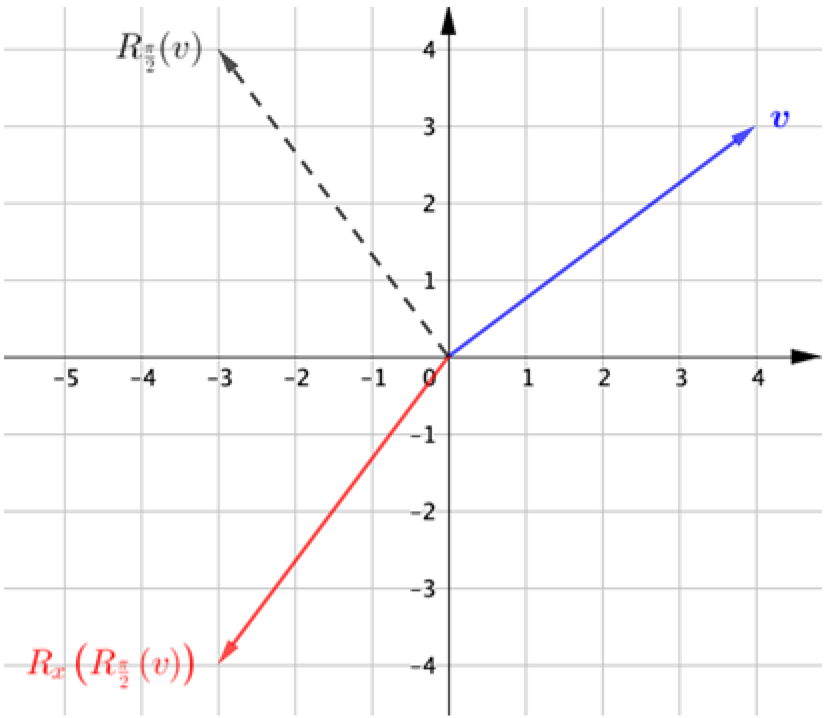
Composição de Transformações

Observe o que acontece invertendo a ordem:

$$R_x \times R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

Primeiro rotaciona pi/2 e, depois, reflete em x.



Insper

Composição de Transformações (2D-H)

E como fica nas coordenadas homogêneas?

Exemplo: escala $S_{0,5}$ seguida de translação $T_{3,1}$.

$$T_{3,1} \times S_{0,5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 3 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 3 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5x + 3 \\ 0,5y + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Insper

Sumário de Transformações Geométricas Básicas

Lineares:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$
$$f(a\mathbf{x}) = af(\mathbf{x})$$

- Escala
- Rotação
- Reflexão
- Cisalhamento

Não Lineares

- Translação

Transformações Afim:

Composição de uma transformação linear + translação

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$$

Isometria

Preserva a distância entre os pontos (comprimento)

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

- Translação
- Rotação
- Reflexão

Teorema - Transformações Geométricas Básicas

Toda isometria do plano, distinta da transformação identidade, é uma, e apenas uma, das seguintes transformações: translação, rotação, reflexão em relação a uma reta ou reflexão transladada.

Indo para o espaço 3D

Usando coordenadas homogêneas em 3D

Ponto 3D : $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{1})^T$

Vetor 3D : $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{0})^T$

Matrizes 4x4 para transformações afim:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & t_x \\ d & e & f & t_y \\ g & h & i & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Indo para o espaço 3D

Transformações 3D como matrizes 3x3 e 3D-H como matrizes 4x4

3D **3D-H**

Escala:

$$\mathbf{S_s} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_x & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{S_s} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3D **3D-H**

Cisalhamento:
(em x)

$$\mathbf{H}_{x,\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{d}_y & \mathbf{d}_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_{x,\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{d}_y & \mathbf{d}_z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

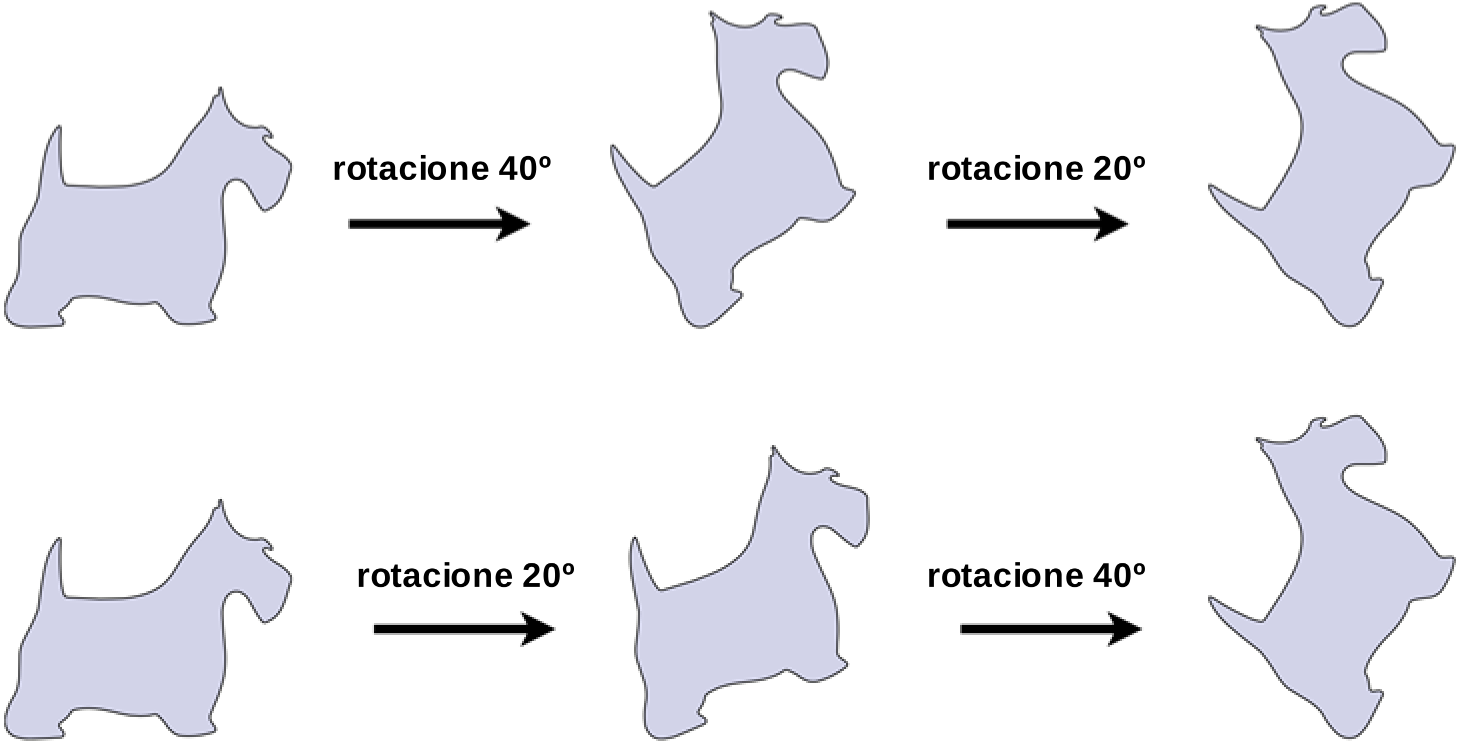
3D-H

Translação:

$$\mathbf{T_b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{b}_x \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{b}_y \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{b}_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

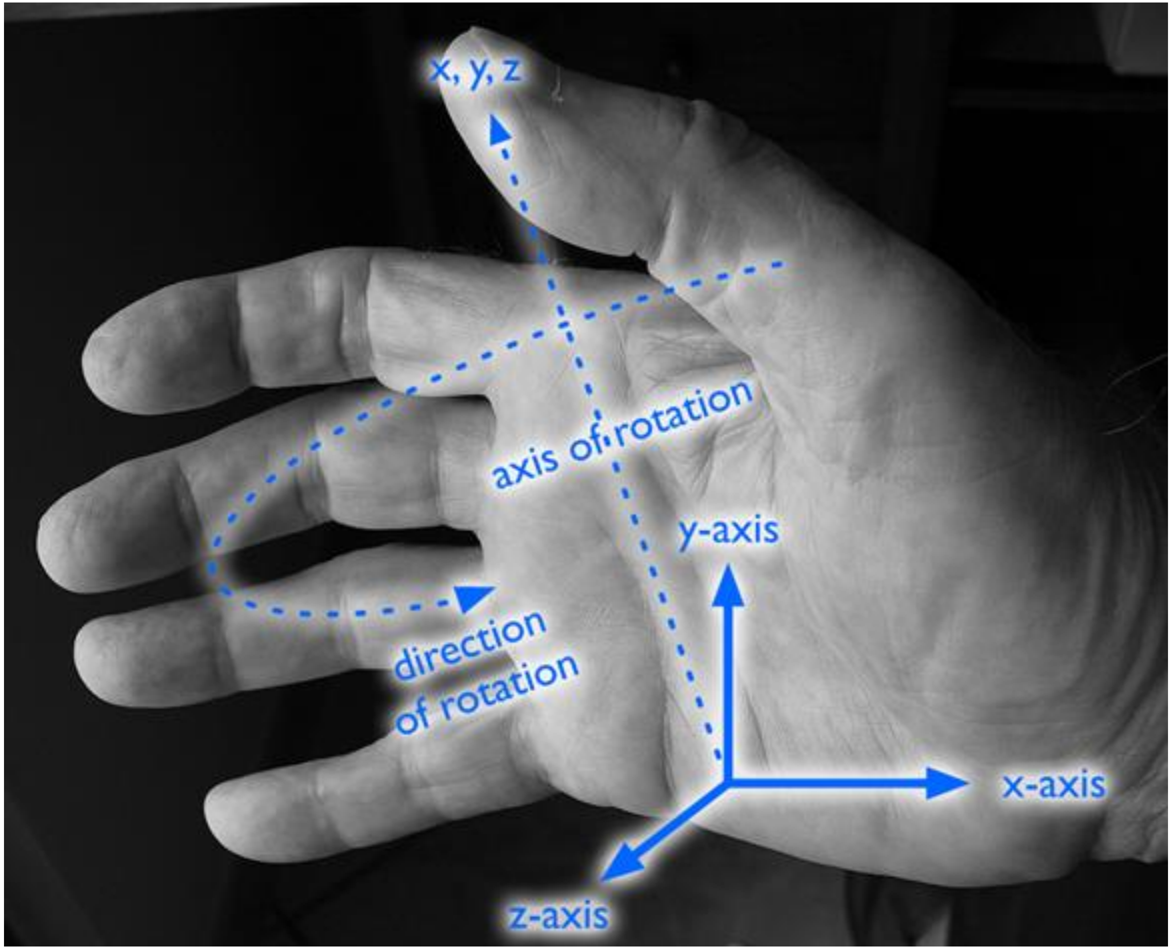
Comutatividade da Rotação (em 2D)

Em 2D a ordem da rotação não importa.



Mesmo resultado. Bom! É comutativo

Eixos e Rotações em 3D



Insper

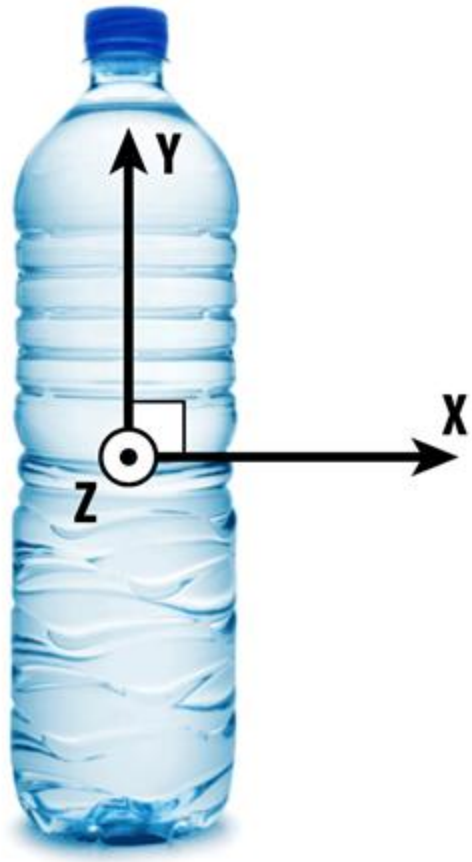
Comutatividade da Rotação (em 3D)

Experimento, gire a garrafa (sempre no sentido positivo da regra da mão direita):

- Gire 90° em torno de Y, a seguir 90° em torno de Z, a seguir 90° em torno de X
- Gire 90° em torno de Z, a seguir 90° em torno de Y, a seguir 90° em torno de X

Houve alguma diferença?

Não é o mesmo resultado.
Isso pode dar problemas.



Rotações em 3D por ângulos de Euler

Rotação sobre os eixos:

3D

$$\mathbf{R}_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

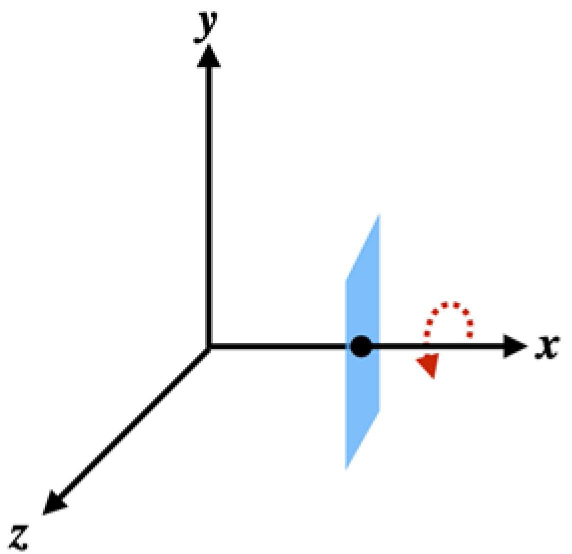
$$\mathbf{R}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3D-H

$$\mathbf{R}_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

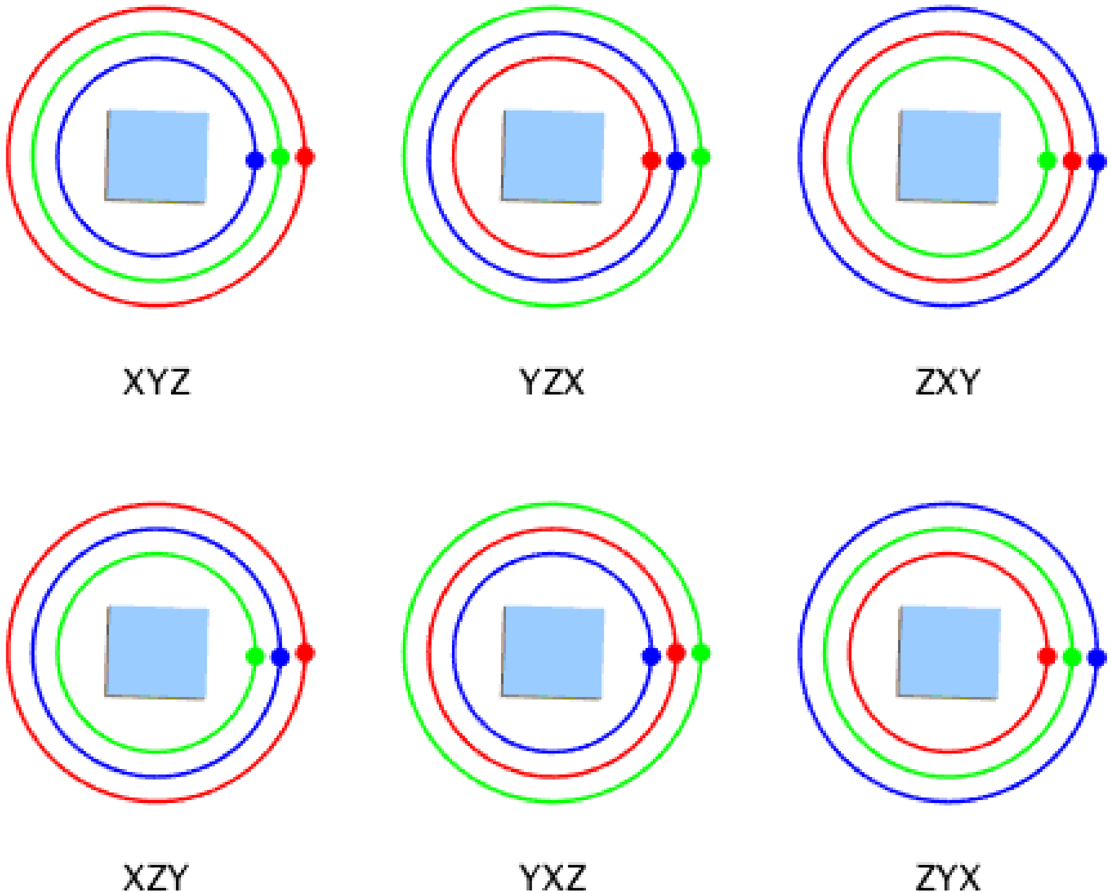
$$\mathbf{R}_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



os pontos que estiverem sobre o eixo de rotação ficam inalterados.

Problema 1: Ordem das rotações



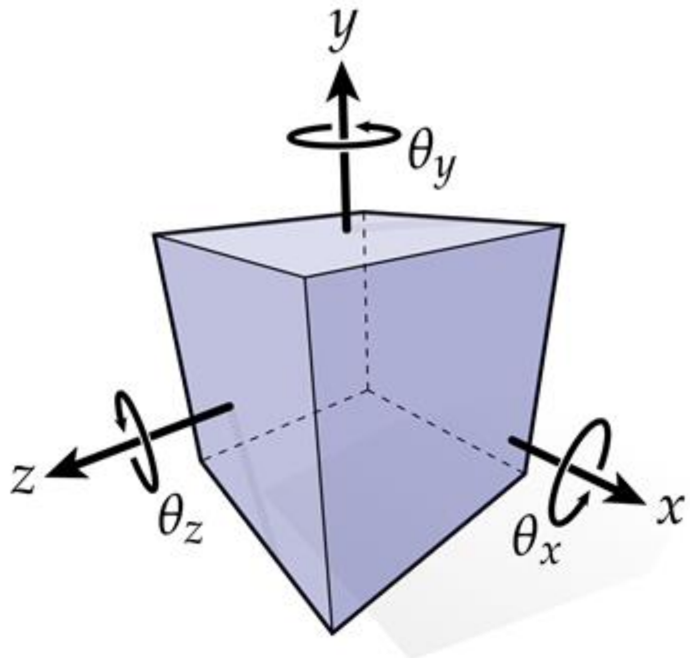
Insper

Rotações em 3D – ângulos de euler

Como expressamos rotações em 3D?

Possibilidade: aplicar rotações em torno dos três eixos? (X, Y, Z)

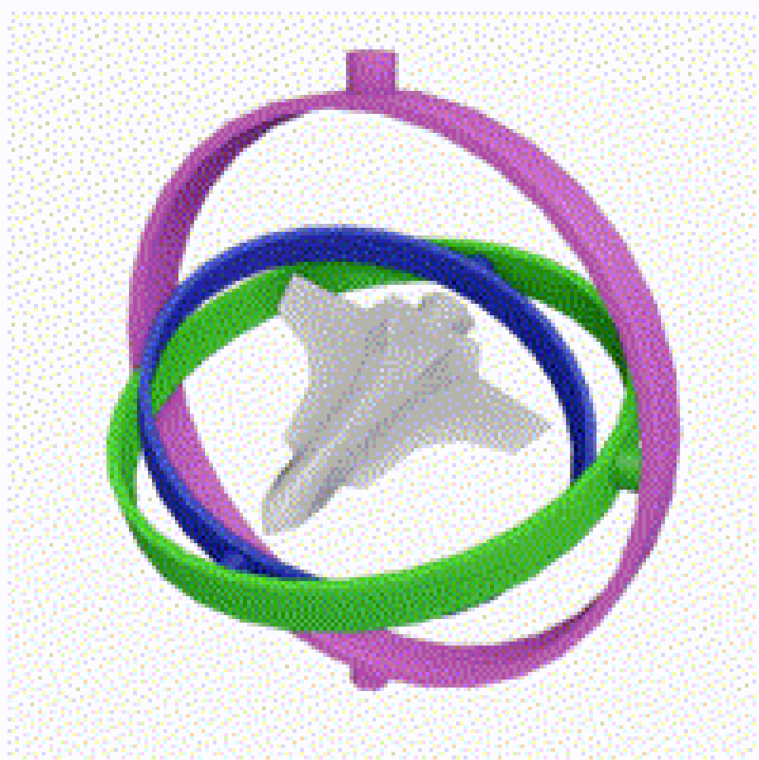
Essa proposta é chamada de ângulos de Euler



Insper

Problema 2: Gimbal Lock

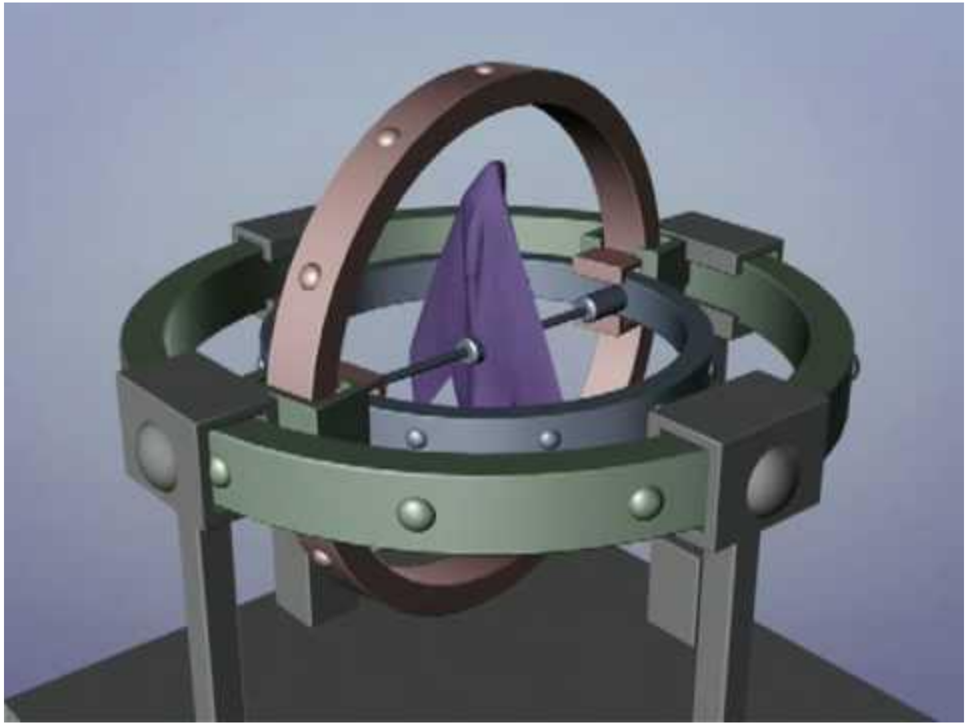
Conforme se executa rotações, uma rotação pode chegar a anular outras rotações.



Insper

Problema 2: Gimbal Lock

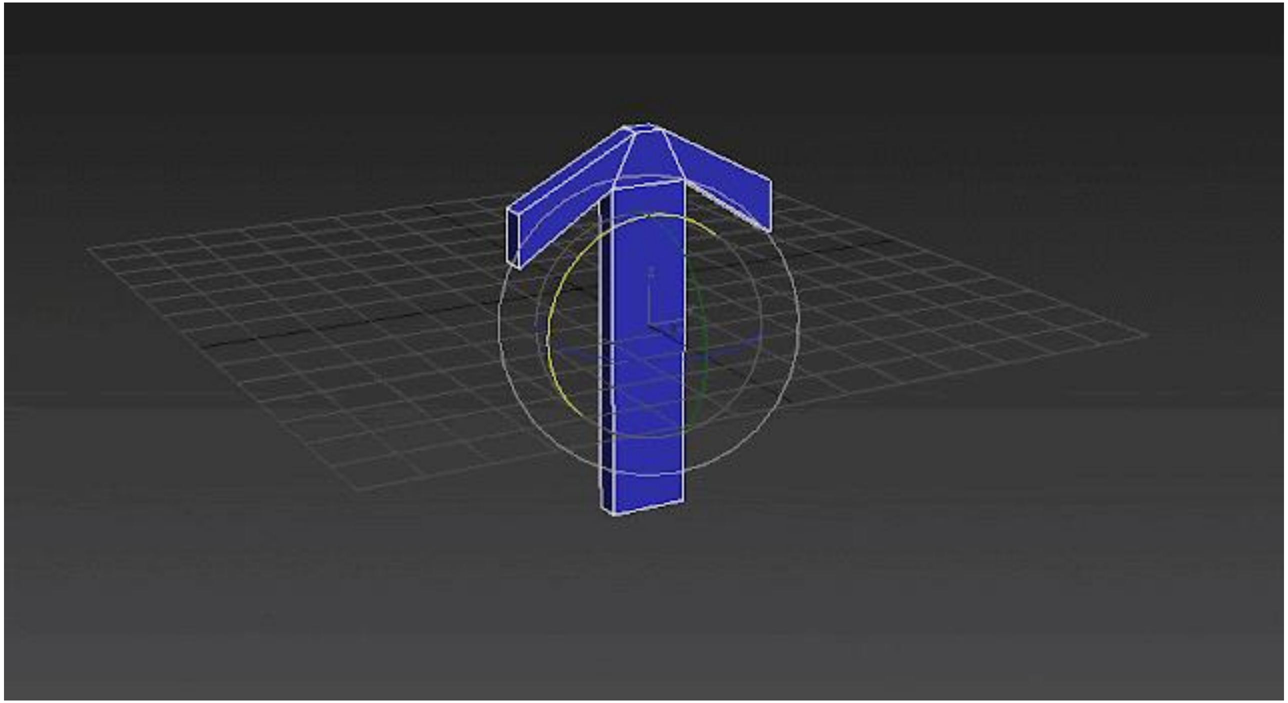
Vídeo sobre Gimbal Lock



https://www.youtube.com/watch?v=zc8b2Jo7mno

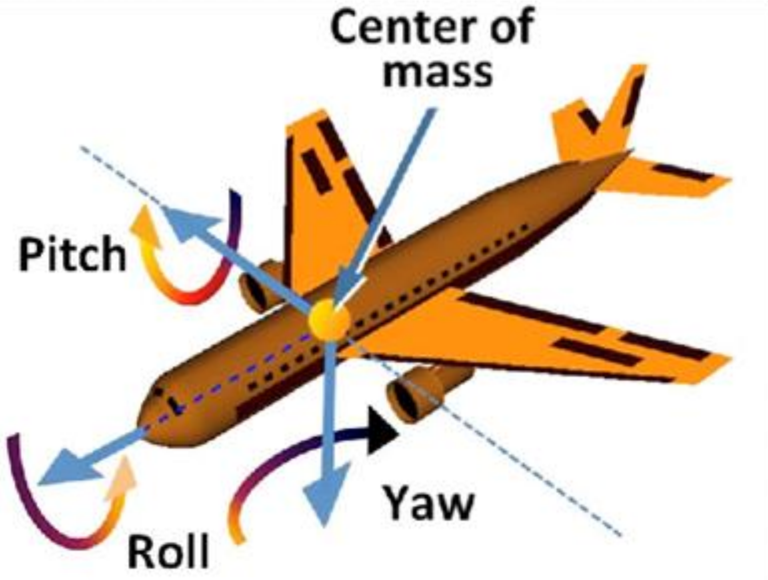
problema 3 : SLERP

Interpolação de rotações podem ficar muito estranhas



Rotações em 3D

Para definir cada um dos ângulos a área de aviação usa os seguintes termos:



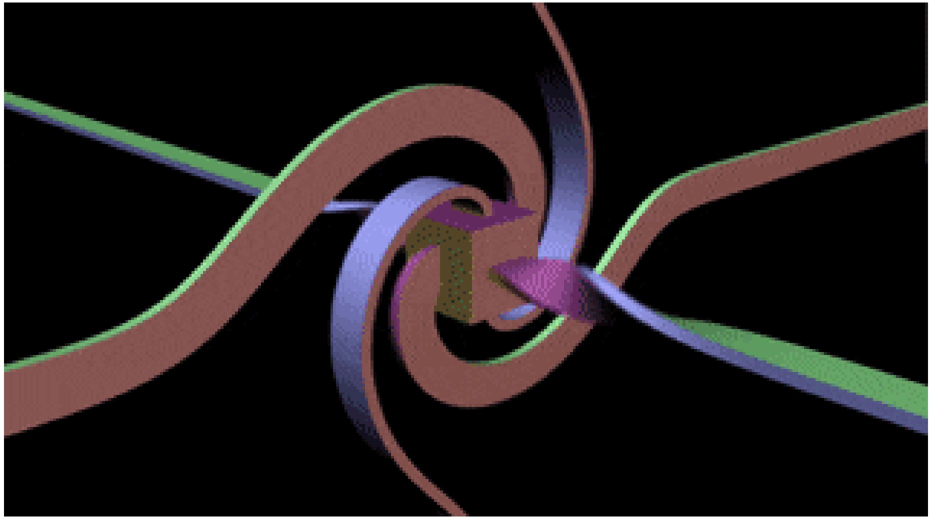
Wikipédia: Os **Ângulos de Tait–Bryan** (nomeados através de Peter Guthrie Tait e George Bryan), são um tipo específico de ângulos de Euler usados normalmente em aplicações aeroespaciais para definir a relativa orientação do aeroplano. Os três ângulos especificados nesta fórmula são especificados como empinamento (pitch ou θ), cabeceio (yaw ou ψ) e balanceio (roll ou φ).

https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%82ngulos_de_Tait%E2%80%93Bryan

Representação Alternativa de Rotações 3D

Quatérnios.

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$



The Strange Numbers That Birthed Modern Algebra; Quanta Magazine

Quatérnios

Podemos pensar os números Complexos ($\mathbb{C}$) como uma extensão dimensional dos números Reais ($\mathbb{R}$).

Dessa forma, os Quatérnios ($\mathbb{H}$) são uma extensão para uma quarta dimensão dos números Reais.

O que são Quatérnios

- São quatro valores reais e três unidades imaginárias:

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$

Imaginários:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \ \mathbf{ijk} = -1$$
$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}$$
$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \ \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \ \mathbf{ik} = -\mathbf{j}$$

Reais (escalares)

$$a, b, c, d$$

Obs: Perceba que o produto dos imaginários i,j,k se comporta como um produto vetorial.

A base canônica dos quatérnios

O conjunto {1, i, j, k} forma uma base dos quatérnios, pois todo quatérnio pode ser escrito como uma combinação linear desses elementos.

Note que se trata de uma **base ortonormal**.

Lembre que os vetores de uma base ortonormal são dois a dois ortogonais e têm comprimento unitário.

Como representar quatérnios

$$q = q_r + q_i i + q_j j + q_k k$$
$$q = (q_r, q_i, q_j, q_k)$$
$$q = q_r + \mathbf{q}$$

Definição:

Para um quatérnio $q_r + \mathbf{q}$, dizemos que q_r é a parte escalar e $\mathbf{q}$ é a parte vetorial.

Multiplicação de Quatérnios

Podemos representar o produto de quatérnios de diversas formas:

$$\mathbf{pq} = (p_r + p_i i + p_j j + p_k k)(q_r + q_i i + q_j j + q_k k)$$
$$= (p_r q_r - p_i q_i - p_j q_j - p_k q_k) + (\dots)i + (\dots)j + (\dots)k$$

Uma forma de representar o produto de quatérnios é usando a representação de produtos escalares e produtos vetoriais:

$$\mathbf{pq} = p_r q_r - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_r \mathbf{q} - q_r \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}$$

Quatérnios

Não são comutativos

$$\mathbf{q_1 q_2 \neq q_2 q_1}$$

Porém manipulações usuais são válidas

$$\mathbf{(q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3)}$$
$$\mathbf{(q_1 + q_2) q_3 = q_1 q_3 + q_2 q_3}$$
$$\mathbf{q_1 (q_2 + q_3) = q_1 q_2 + q_1 q_3}$$
$$\lambda(\mathbf{q_1} + \mathbf{q_2}) = \lambda \mathbf{q_1} + \lambda \mathbf{q_2} \quad (\lambda \text{ é escalar})$$
$$(\lambda \mathbf{q_1}) \mathbf{q_2} = \lambda (\mathbf{q_1 q_2}) = \mathbf{q_1} (\lambda \mathbf{q_2}) \quad (\lambda \text{ é escalar})$$

Conjugado

Seja **z** um número complexo.

$z \in \mathbb{C}$; *Lê − se* $\mathbf{z}$ *pertence ao conjunto dos números complexos*

Então temos que o nosso número z é escrito da seguinte forma:

$z = x + yi$ *, ou em forma de coordenada* $z = (x, y)$

O conjugado do número z é representado por $\bar{z}$, e para obtermos este conjugado, basta trocarmos o sinal da parte imaginária do número z, sendo assim:

$\bar{z} = x - yi$ *, ou em forma de coordenada* $\bar{z} = (x, -y)$.

Propriedades

- $|z| = |\bar{z}|$ (O módulo do conjugado de um número é o mesmo módulo do número)
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ (o produto de um número pelo seu conjugado é o quadrado do módulo do número)
- $z + \bar{z} = 2Re(z)$ (a soma de um número ao seu conjugado é o dobro da parte real do número)
- $z - \bar{z} = 2Im(z)$ (a subtração de um número ao seu conjugado é o dobro da parte imaginária do número)

Insper

Conjugado

Conjugado de um quatérnio

$$\bar{q} = q_r - q_i i - q_j j - q_k k$$

Assim:

$$q\,\bar{q} = (q_r + \mathbf{q})(q_r - \mathbf{q})$$

$$q\,\bar{q} = q_r^2 + q_r\mathbf{q} - q_r\mathbf{q} - \mathbf{q}\mathbf{q}$$

$$q\,\bar{q} = q_r^2 + \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} - \mathbf{q} \times \mathbf{q}$$

$$q\,\bar{q} = q_r^2 + q_i^2 + q_j^2 + q_k^2$$

Módulo:

$$|q| = \sqrt{q\,\bar{q}} = \sqrt{q_i^2 + q_j^2 + q_k^2 + q_r^2}$$

Insper

Propriedades algébricas dos quatérnios

Inverso de um quatérnio: $$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

Quatérnio unitário: $$|q| = 1$$

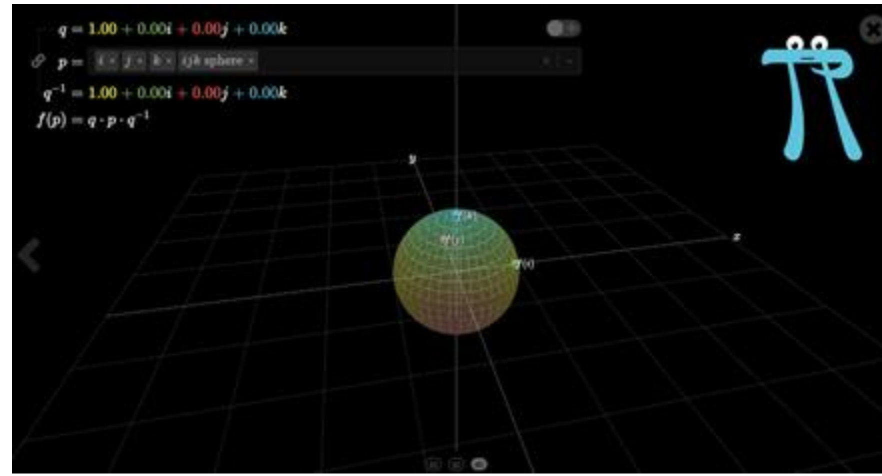
Inverso de um quatérnio unitário: $$q^{-1} = \bar{q}$$

Quatérnios e Rotações

Rotações são representadas por quatérnios unitários

$$q = q_r + q_i i + q_j j + q_k k$$

$$q_i^2 + q_j^2 + q_k^2 + q_r^2 = 1$$



- Quatérnios unitários vivem em uma superfície esférica unitária no R^4
- Os quatérnios q e -q representam a mesma rotação
- A rotação nula (identidade) é o quatérnio = 1

Lessons by Grant Sanderson Technology by Ben Eater

Rotação de Quatérnios unitários

Uma rotação é definida por um eixo u com uma rotação θ.

$$\begin{aligned} \text{eixo} &= \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix} \\ \text{ângulo} &= \theta \end{aligned}$$

Um quatérnio terá a parte escalar igual a cosseno(θ/2) e sua parte imaginária (indicada por um ponto no espaço) como os eixos multiplicados pelo seno(θ/2) e os respectivos valores imaginários.

$$q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u_x i + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u_y j + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u_z k$$

Quatérnios Unitários e Rotações

Para trabalharmos com a rotação por quatérnios, precisamos deles normalizados:

$$\hat{q} = \frac{q_r + q_i i + q_j j + q_k k}{\sqrt{q_r^2 + q_i^2 + q_j^2 + q_k^2}}$$

Sua rotação pode ser realizada pela operação:

$$rot(v) = q \cdot v \cdot q^{-1}$$

Insper

Representação Quatérnios em Coord. Homogêneas

Na prática:

$$\hat{q} = q_i i + q_j j + q_k k + q_r = \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \\ q_k \\ q_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \sin\frac{\theta}{2} \\ u_y \sin\frac{\theta}{2} \\ u_z \sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

O que leva uma matriz de rotação:

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2\left(q_j^2 + q_k^2\right) & 2(q_i q_j - q_k q_r) & 2(q_i q_k + q_j q_r) & 0 \\ 2(q_i q_j + q_k q_r) & 1 - 2\left(q_i^2 + q_k^2\right) & 2(q_j q_k - q_i q_r) & 0 \\ 2(q_i q_k - q_j q_r) & 2(q_j q_k + q_i q_r) & 1 - 2\left(q_i^2 + q_j^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A definição acima armazena quaternion como uma matriz seguindo a convenção usada em (Wertz 1980) e (Markley 2003)*

Insper

Computação Gráfica

Luciano Soares
<lpsoares@insper.edu.br>